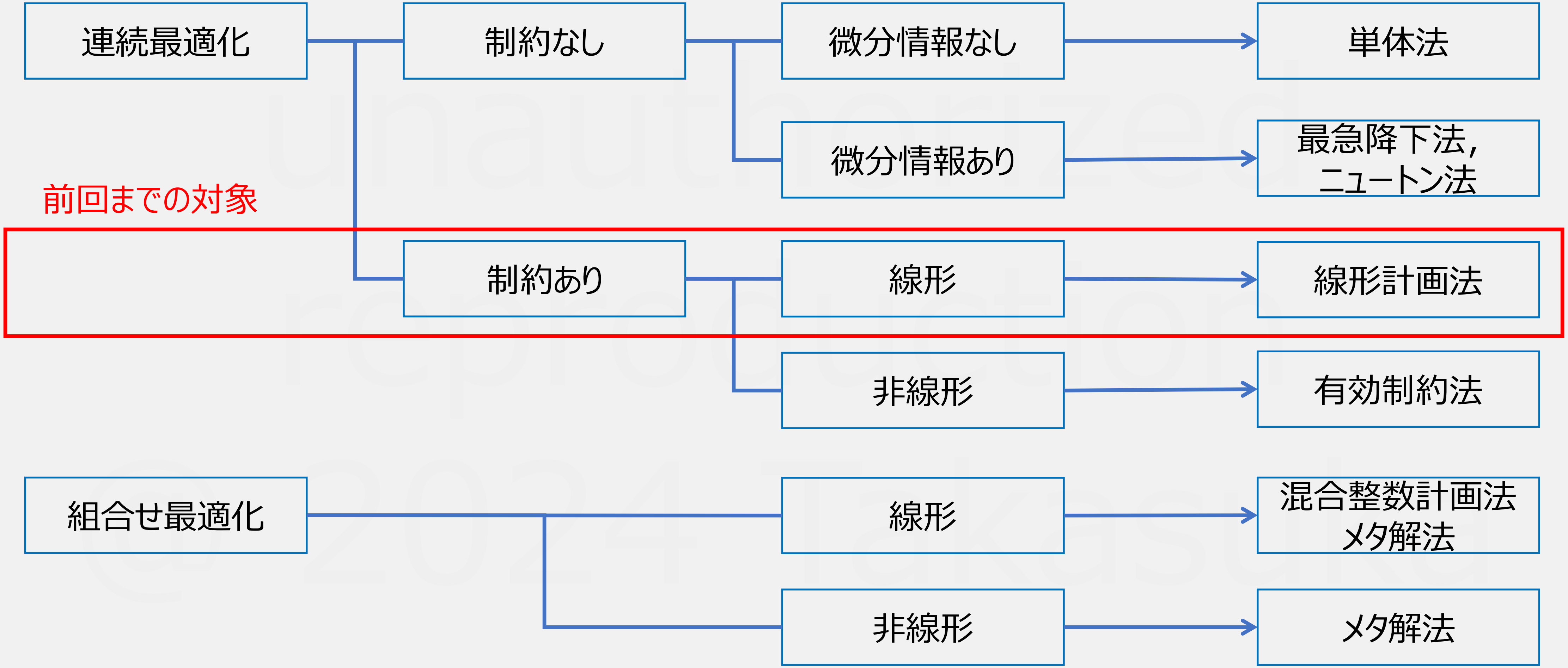
目次

代表的な最適化問題とアルゴリズム



代表的な最適化問題とアルゴリズム

代表的な最適化問題とアルゴリズム

組合せ最適化（離散最適化問題）

問題	アルゴリズム
資源配分問題，最小全域木問題	貪欲法
最短路問題	ダイクストラ法
最大流問題，最大マッチング問題	ハンガリー法，負閉路消去法
整数計画問題	分枝限定法
ビンパッキング問題，巡回セールスマン問題，頂点被覆問題，ナップサック問題	性能保証付き近似解法
さまざまなNP困難問題	メタ解法，発見的解放，局所探索法

組合せ最適化問題

- 数理最適化において各変数が実数値をとりえる場合，最適解も実数となる（整数解ではあるとは限らない）．
- 各変数が実数値をとり得ない場合，つまり，変数が人や機械の数などの整数でなければ意味をなさないものの場合には，
  - まず，各変数は実数値をとりうるものとして最適解を求め，最適解において実数値をとる変数があれば，その値を切り上げる（または切り下げる）ことで整数解にする
    - 実数値を整数値に丸める際，最終的に得られる解が実行可能化になる（つまり，すべての制約条件を満たす）ように注意する必要がある．実行可能な整数解を得ることが容易でない場合も多い．また，実行可能な整数解が得られたとしても，それが厳密な意味で最適である保証はない.
  - 「整数条件」を考慮して問題を解く
    - 組合せ最適化問題（または整数計画問題，整数最適化問題，離散最適化問題）と呼ばれる問題を解くことになる．一般に，整数最適化問題の最適解を求めることは計算上困難であることが知られている.

【例題4-1】勤務シフト

- 従業員の1週間分の勤務シフトを作成したい．
- 各従業員は「5日連続勤務したあと，2日連休」のパターンを繰り返すものとし，何曜日から出勤するかによって7つのシフトパターン（「月～金に出勤・土日休み」，「火～土に勤務・日月休み」など）が考えられる．
- 曜日ごとの必要人数が以下の表で与えられており，すべての曜日で必要人数を満たすような勤務シフトが求められている．
- できるだけ少ない従業員で条件を満たすためには，各シフトに何名ずつ配置する必要があるか．

曜日	月	火	水	木	金	土	日
必要人数	15	11	11	14	17	22	20

【例題4-1】勤務シフト

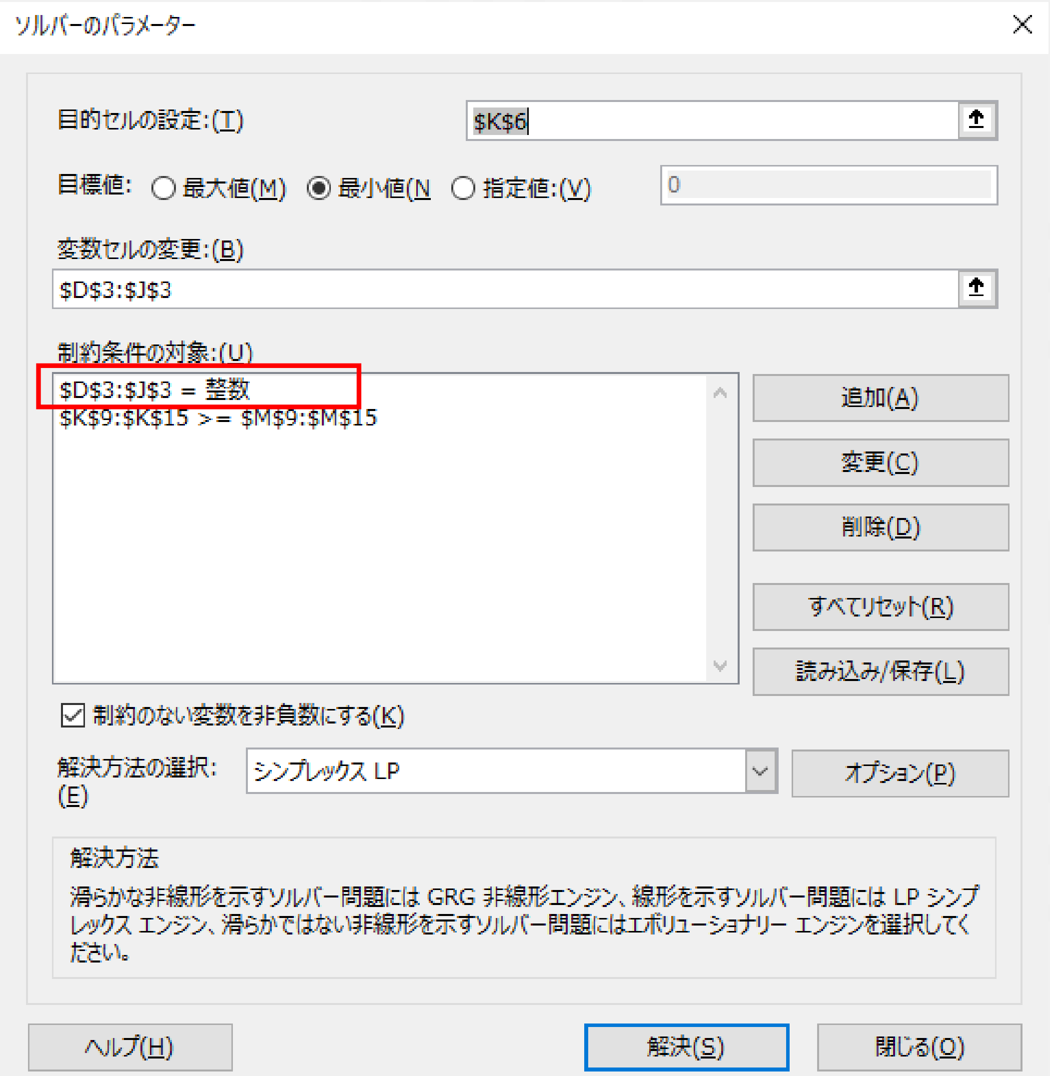
- 整理してみよう
- 変数は？
  - 休日が「土日」，「日月」，…，「金土」であるシフトパターンに配置する人数をそれぞれ$x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$とする
- 目的は？
  - 利益の最大化
    - $min\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$
- 制約は？
  - 各曜日の必要人数
    - $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 15$
    - $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$
    - $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 11$
    - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 14$
    - $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 17$
    - $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 22$
    - $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 20$
    - $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7 \in \{0, N\}$
- これを解くと，最適解は$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0,2,6,6,6,3,0)$であり，最適値は23名となる

整数

【例題4-1】勤務シフト

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2		変数		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7								
3																		
4																		
5											人数							
6		目的	最大化	1	1	1	1	1	1	1	0				=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D6:J6)			
7																		
8											総使用量		必要人数					
9		制約	必要人数（月）	1	0	0	1	1	1	1	0	≧	15		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D9:J9)			
10			必要人数（火）	1	1	0	0	1	1	1	0	≧	11		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D10:J10)			
11			必要人数（水）	1	1	1	0	0	1	1	0	≧	11		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D11:J11)			
12			必要人数（木）	1	1	1	1	0	0	1	0	≧	14		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D12:J12)			
13			必要人数（金）	1	1	1	1	1	0	0	0	≧	17		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D13:J13)			
14			必要人数（土）	0	1	1	1	1	1	0	0	≧	22		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D14:J14)			
15			必要人数（日）	0	0	1	1	1	1	1	0	≧	20		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D15:J15)			

【例題4-1】勤務シフト


ソルバーのパラメーター
目的セルの設定:(T)
$K$6
目標値: 最大値(M) 最小値(N 指定値:(V)
0
変数セルの変更:(B)
$D$3:$J$3
制約条件の対象:(U)
$D$3:$J$3 = 整数
$K$9:$K$15 >= $M$9:$M$15
追加(A)
変更(C)
削除(D)
すべてリセット(R)
読み込み/保存(L)
制約のない変数を非負数にする(K)
解決方法の選択:(E)
シンプレックス LP
オプション(P)
解決方法
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューショナリー エンジンを選択してください。
ヘルプ(H)
解決(S)
閉じる(O)

【例題4-1】勤務シフト

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1																		
2		変数		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7								
3				0	2	6	6	6	3	0								
4																		
5											人数							
6		目的	最小化	1	1	1	1	1	1	1	23				=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D6:J6)			
7																		
8											総使用量		必要人数					
9		制約	必要人数（月）	1	0	0	1	1	1	1	15	≧	15		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D9:J9)			
10			必要人数（火）	1	1	0	0	1	1	1	11	≧	11		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D10:J10)			
11			必要人数（水）	1	1	1	0	0	1	1	11	≧	11		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D11:J11)			
12			必要人数（木）	1	1	1	1	0	0	1	14	≧	14		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D12:J12)			
13			必要人数（金）	1	1	1	1	1	0	0	20	≧	17		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D13:J13)			
14			必要人数（土）	0	1	1	1	1	1	0	23	≧	22		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D14:J14)			
15			必要人数（日）	0	0	1	1	1	1	1	21	≧	20		=SUMPRODUCT(D$3:J$3,D15:J15)			

【演習4-1】生産計画（練習2）の組合せ最適化問題

- 【演習2】生産計画　で，机A，Bは5個単位で生産するものとしたとき，利益を最大にする生産個数を求めよ

【演習2】線形計画問題の例（生産計画問題）

- ある会社では2種類の机A，Bを生産しており，これらの翌週の生産計画を考えている．机A，Bはそれぞれ1つあたり，厚さ1インチのパイン，スギ，メイプルを以下の量（ft^2，平方フィート）ずつ必要とし，利益はそれぞれ1つあたり$115，$90である．翌週使うことのできるパイン，スギ，メイプルの量が，それぞれ200 ft^2，128 ft^2，220 ft^2 であるとき，利益を最大にするためには机A，Bをいくつずつ生産すれば良いか．

	机A	机B	使用可能料
パイン	10	20	200
スギ	4	16	128
メイプル	15	10	220
利益	115	90	

【演習4-1】生産計画（練習2）の組合せ最適化問題

- 【演習2】生産計画　をそのまま解くと，

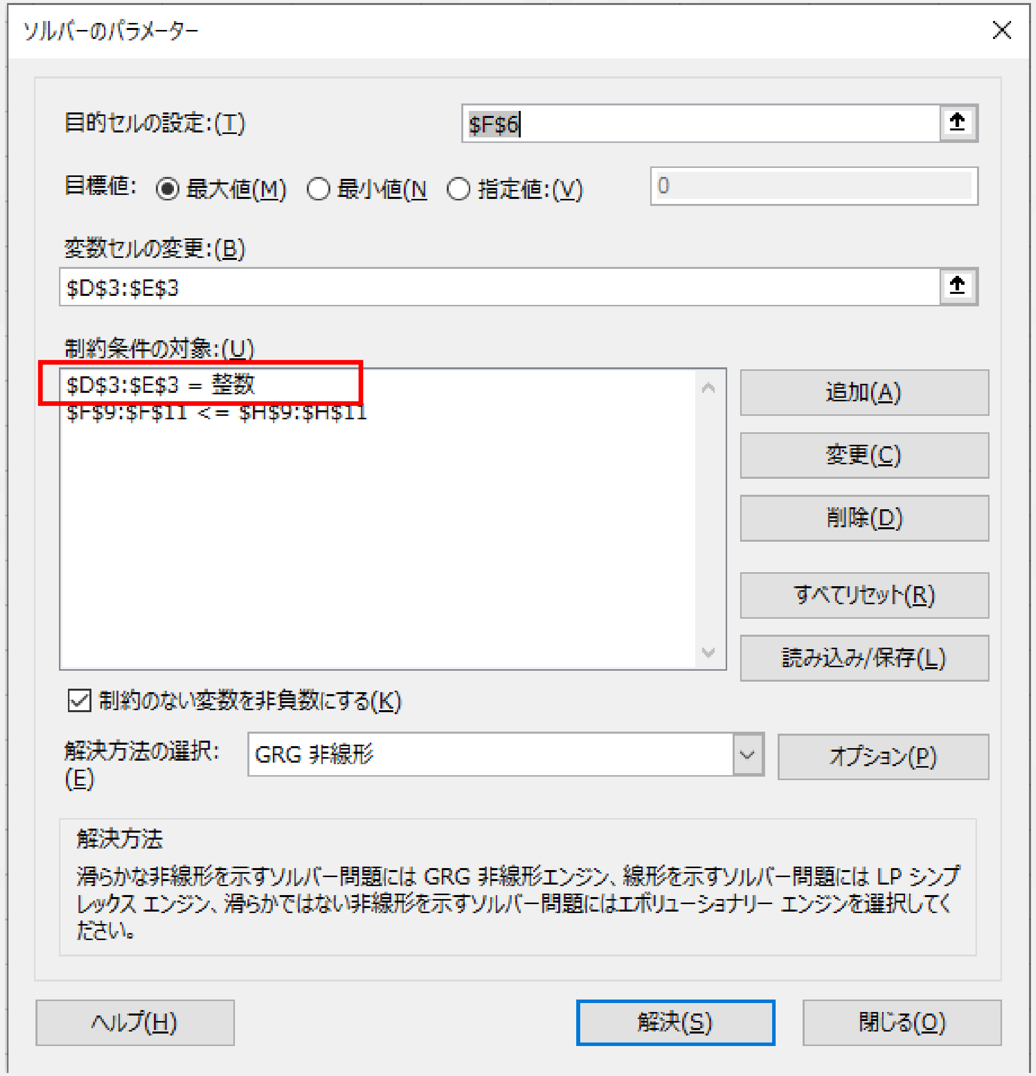
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		変数	生産個数	机A	机B								
3			5個セット個	0	0								
4			実際の個数	0	0								
5						純利益							
6		目的	最大化	115	90	0				=SUMPRODUCT(D4:E4,D6:E6)			
7													
8						総使用量		使用可能量					
9		制約	パイン	10	20	0	≦	200		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D9:E9)			
10			スギ	4	16	0	≦	128		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D10:E10)			
11			メイプル	15	10	0	≦	220		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D11:E11)			

【演習4-1】生産計画（練習2）の組合せ最適化問題

- 【演習2】生産計画　をそのまま解くと,

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		変数	生産個数	机A	机B								
3			5個セット個	2.4	0.8								
4			実際の個数	12	4								
5						純利益							
6		目的	最大化	115	90	1740				=SUMPRODUCT(D4:E4,D6:E6)			
7													
8						総使用量		使用可能量					
9		制約	パイン	10	20	200	≦	200		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D9:E9)			
10			スギ	4	16	112	≦	128		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D10:E10)			
11			メイプル	15	10	220	≦	220		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D11:E11)			

【演習4-1】生産計画（練習2）の組合せ最適化問題



【演習4-1】生産計画（練習2）の組合せ最適化問題

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		変数	生産個数	机A	机B								
3			5個セット個	2	1								
4			実際の個数	10	5								
5						純利益							
6		目的	最大化	115	90	1600				=SUMPRODUCT(D4:E4,D6:E6)			
7													
8						総使用量		使用可能量					
9		制約	パイン	10	20	200	≦	200		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D9:E9)			
10			スギ	4	16	120	≦	128		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D10:E10)			
11			メイプル	15	10	200	≦	220		=SUMPRODUCT(D$4:E$4,D11:E11)			

【例題4-2】プロジェクト選定問題

- 新たに行うプロジェクトの候補がA～Jの10個あり，それぞれ必要な人員数と期待される利益が以下の表で与えられている．
- プロジェクトに充てられる総人員数が100名であるとしたとき，できるだけ利益が多くなるようにプロジェクトをいくつか選択して実施したい．どのプロジェクトを選択すれば良いか．ただし，各人が複数のプロジェクトを掛け持ちすることはできないものとする．

プロジェクト	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
必要人数	35	3	25	2	45	25	5	2	1	30
利益	400	8	350	5	450	70	20	5	8	200

【例題4-2】プロジェクト選定問題

- 整理してみよう
- 変数は？
  - 各プロジェクトi (i ∈ $\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J\}$)を実施するとき，$x_i = 1$とし，実施しないとき$x_i = 0$とする

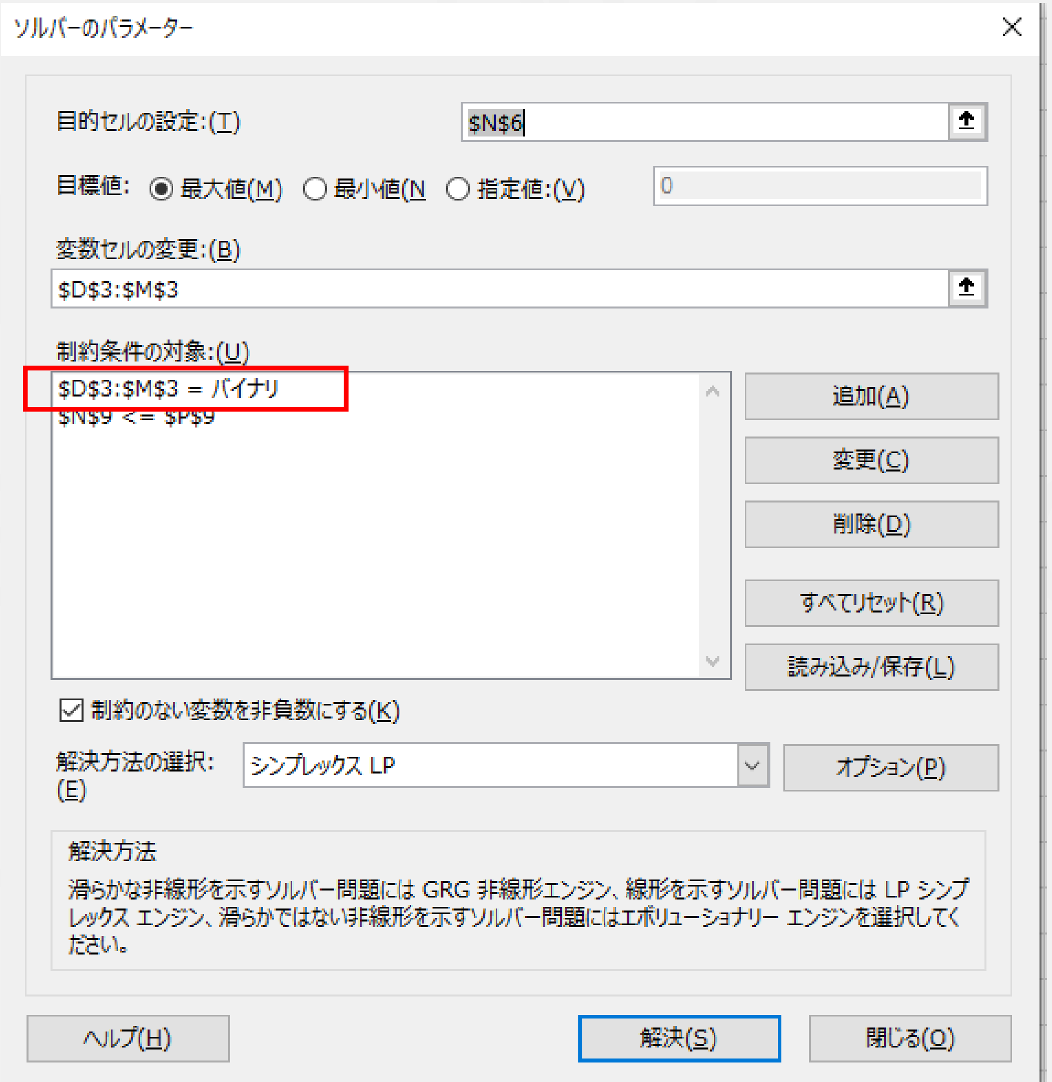
バイナリ変数

- 目的は？
  - 利益の最大化
    - $max\, 400x_A + 8x_B + 350x_C + 5x_D + 450x_E + 70x_F + 20x_G + 5x_H + 8x_I + 200x_J$
- 制約は？
  - 総人数
    - $35x_A + 3x_B + 25x_C + 2x_D + 45x_E + 25x_F + 5x_G + 2x_H + x_I + 30x_J \leq 100$
    - $x_i \in \{0,1\}, i = A,B,C,\dots,J$
- これを解くと，最適解は$(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, x_G, x_H, x_I, x_J) = (0,0,1,0,1,0,0,0,0,1)$であり，プロジェクトC，E，Jを選べば良く，利益は1000となる

【例題4-2】プロジェクト選定問題

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1																					
2		変数		xA	xB	xC	xD	xE	xF	xG	xH	xI	xJ								
3				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0								
4																					
5														人数							
6		目的	最小化	400	8	350	5	450	70	20	5	8	200	0				=SUMPRODUCT(D$3:M$3,D6:M6)			
7																					
8														総使用量		必要人数					
9		制約	必要人数（月）	35	3	25	2	45	25	5	2	1	30	0	≦	100		=SUMPRODUCT(D$3:M$3,D9:M9)			

【例題4-2】プロジェクト選定問題



【例題4-2】プロジェクト選定問題

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1																					
2		変数		xA	xB	xC	xD	xE	xF	xG	xH	xI	xJ								
3				0	0	1	0	1	0	0	0	0	1								
4																					
5														人数							
6		目的	最大化	400	8	350	5	450	70	20	5	8	200	1000				=SUMPRODUCT(D$3:M$3,D6:M6)			
7																					
8														総使用量		必要人数					
9		制約	必要人数（月）	35	3	25	2	45	25	5	2	1	30	100	≦	100		=SUMPRODUCT(D$3:M$3,D9:M9)			

【演習4-2】プロジェクト選定問題1

- プロジェクトEとGのどちらか一方だけを実施することはできない（ともに実施するか，またはともに実施しない）ときの制約条件を述べよ
- このとき，利益が最適値と最適解を計算せよ

プロジェクト	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
必要人数	35	3	25	2	45	25	5	2	1	30
利益	400	8	350	5	450	70	20	5	8	200

【演習4-2】プロジェクト選定問題1

配布用

【演習4-2】プロジェクト選定問題1

配布用

【演習4-3】プロジェクト選定問題2

- プロジェクトHまたはIの少なくともどちらか一方を実施しなければならないときの制約条件を述べよ
- このとき，利益が最適値と最適解を計算せよ

プロジェクト	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
必要人数	35	3	25	2	45	25	5	2	1	30
利益	400	8	350	5	450	70	20	5	8	200

【演習4-3】プロジェクト選定問題2

配布用

),

【演習4-3】プロジェクト選定問題2

配布用

【演習4-4】プロジェクト選定問題3

- プロジェクトCまたはJのどちらか一方を実施しなければならない（両方実施してはならない）ときの制約条件を述べよ
- このとき，利益が最適値と最適解を計算せよ

プロジェクト	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
必要人数	35	3	25	2	45	25	5	2	1	30
利益	400	8	350	5	450	70	20	5	8	200

【演習4-4】プロジェクト選定問題3

配布用

【演習4-4】プロジェクト選定問題3

配布用

【演習4-5】プロジェクト選定問題4

- プロジェクトJを実施するならばBも実施しなければならない（Jを実施しないならば，Bは実施しなくても構わない）ときの制約条件を述べよ
- このとき，利益が最適値と最適解を計算せよ

プロジェクト	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
必要人数	35	3	25	2	45	25	5	2	1	30
利益	400	8	350	5	450	70	20	5	8	200

【演習4-5】プロジェクト選定問題4

配布用

【演習4-5】プロジェクト選定問題4

配布用

【例題4-3】割当問題

- 7つの業務A，B，C，D，E，F，Gに社員をそれぞれ1名ずつ割当てることを考える.
- 候補者は以下の表の7名で，それぞれ担当可能な業務が決まっている.
- 複数の業務を担当可能な社員もいるが，1人が同時に複数の業務は担当することはないものとする.
- できるだけ多くの業務に社員を割当てる（どの業務にも割当てられない社員の数を少なくする）にはどのようにすればよいか.

	社員1	社員2	社員3	社員4	社員5	社員6	社員7
担当可能な業務	A，C	B，D	A，B	D	B，D	D，E，G	F，G

【例題4-3】割当問題

- 整理してみよう
- 変数は？
  - 割当て可能な社員と業務の組(i,j) $(\mathrm{i}=1,2,\ldots,6, \mathrm{j}\in\{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F},\mathrm{G}\})$に対し，社員$\mathrm{i}$を業務$j$に割当てるとき$x_{ij}=1$とし，割当てないとき$x_{ij}=0$とする
- 目的は？
  - 割当て人数の最大化
    - $max\ \ x_{1A}+x_{1C}+x_{2B}+x_{2D}+x_{3A}+x_{3B}+x_{4D}+x_{5B}+x_{5D}+x_{6D}+x_{6E}+x_{6G}+x_{7F}+x_{7G}$
- 制約は？
  - 社員の割当て上限数
    - $x_{1A}+x_{1C}\le 1$
    - $x_{2B}+x_{2D}\le 1$
    - $x_{3A}+x_{3B}\le 1$
    - $x_{5B}+x_{5D}\le 1$
    - $x_{6D}+x_{6E}+x_{6G}\le 1$
    - $x_{7F}+x_{7G}\le 1$
    - $x_{ij}\in\{0,1\}, i=1,2,\ldots,6\ J\in\{A,B,\ldots,G\}$
  - 業務の上限数
    - $x_{1A}+x_{3A}\le 1$
    - $x_{2B}+x_{3B}+x_{5B}\le 1$
    - $x_{2D}+x_{4D}+x_{5D}+x_{6D}\le 1$
    - $x_{6G}+x_{7G}\le 1$
- これを解くと，最適解の1つは$\{(1,\mathrm{C}),(2,\mathrm{D}),(3,\mathrm{A}),(5,\mathrm{B}),(6,\mathrm{G}),(7,\mathrm{F})\}$であり，6個の業務に社員を割当てることができる

その他にも
{(1,C),(2,D),(3,A),(4,D),(6,G),(7,F)}，{(1,C),(2,D),(3,A),(5,B),(6,G),(7,F)}，{(1,C),(2,B),(3,A),(4,D),(6,G),(7,F)}，{(1,C),(2,B),(3,A),(5,D),(6,G),(7,F)}，{(1,A),(2,D),(3,B),(5,D),(6,G),(7,F)}，
{(1,A),(2,D),(3,B),(4,D),(6,G),(7,F)}，{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,G),(7,F)}，{(1,A),(2,B),(3,C),(4,D),(6,G),(7,F)}，{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,E),(7,G)}，{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,E),(7,F)}，
{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,G),(7,F)}，{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,G),(7,G)}，{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,G),(7,F)}，{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,G),(7,G)}，{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,G),(7,F)}，
{(1,A),(2,B),(3,C),(5,D),(6,G),(7,G)}
等がある

【例題4-3】割当問題

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1																									
2		変数		x1A	x1C	x2B	x2D	x3A	x3B	x4D	x5B	x5D	x6D	x6E	x6G	x7F	x7G								
3				0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0								
4																									
5																		人数							
6		目的	最大化	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6				=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D6:Q6)			
7																									
8																		総使用量		必要人数					
9		制約	社員1上限	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D9:Q9)			
10			社員2上限	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D10:Q10)			
11			社員3上限	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D11:Q11)			
12			社員5上限	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D12:Q12)			
13			社員6上限	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D13:Q13)			
14			社員7上限	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D14:Q14)			
15			業務A上限	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D15:Q15)			
16			業務B上限	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D16:Q16)			
17			業務D上限	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D17:Q17)			
18			業務G上限	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	≦	1		=SUMPRODUCT(D$3:Q$3,D18:Q18)			

【例題4-3】割当問題

- 「多くの業務に社員を割当てること」を「良い」割当てと考えて，定式化したが，実際にどのような割当てを良いと考えるかは状況による
  - 社員を業務に割当てることの好ましさ（適正度）を数値化することができるとして，適正度の合計を最大化する
  - 社員にどの業務に就きたいか希望調査をとり，できるかぎり多くの人が第一希望（もしくは上位希望）の業務に就けるようにする
- ある1人の社員が複数の業務を担当したり，逆に，1つの業務に複数の社員を割当てることができる状況も考えられ，このような場合，掛け持ちする業務間の関係や，同じ業務に割当てられる社員の相性なども考慮することが状況によっては求められる．

【演習4-6】研究室配属問題

- インターンシップの学生6名を3つの部門A，B，Cに配属させる
- ただし，学生1，2，3は理系学部の学生で，学生4，5，6は文系学部の学生であるとする
- 配属人数は各部門1から3名であり，理系3名全員，もしくは文系3名全員を同じ部門に配属させることはしないものとする（配属人数が2名で，2名とも理系，あるいは2名とも文系であることは問題ない）
- 各学生の適性判定を行ったところ，以下のような結果になった．点数が高いほど適正があることを表し，「-」は不適正（配属不可）を表す．
- 学生の平均適性点数を最大化するには，どのように配属させれば良いか．

	学生1	学生2	学生3	学生4	学生5	学生6
部門A	8	7	5	5	-	2
部門B	6	3	-	8	6	6
部門C	5	-	3	-	4	3

【演習4-6】研究室配属問題

配布用

【演習4-6】研究室配属問題

配布用

【演習4-7】安定マッチング問題

- ４人の研究医1から4を4つの病院AからDに1人ずつ配属させることを考える.
- 配属を決定するにあたり，各研修医に「配属したい病院の希望順位」を，各病院に「受け入れたい学生希望順」を尋ねたところ，結果は以下の通りであった.
- 配属案に対して，各研修医の満足度を，第1希望に配属されたら4，第2希望に配属されたら3，第3希望に配属されたら2，第4希望に配属されたら1，としたとき，４人の研修医の満足度の合計を最大化する配属案を求めよ

研修医	希望順	病院	希望順
1	CDBA	A	3124
2	DCBA	B	3241
3	DACB	C	1324
4	ACBD	D	1243

【演習4-7】安定マッチング問題

配布用

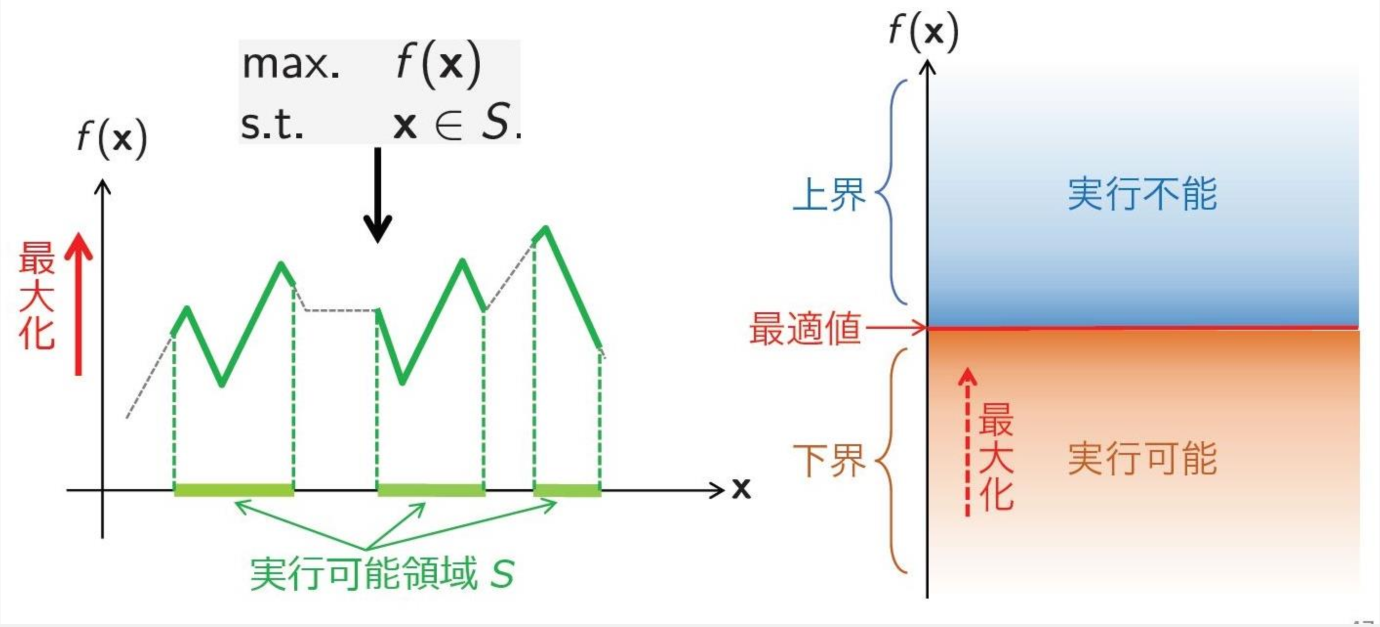
【演習4-7】安定マッチング問題

配布用

以下参考

双対問題と緩和問題

- 非線形計画問題や整数計画問題など，簡単に最適解を求めることができない問題は多い．
- 与えられた最適化問題の上界と下界を簡単に求める方法は？
  →実行可能解から下界は求まる．では上界は？



【例題4-4】双対問題と緩和問題

- 生産計画問題で試してみよう
- 2つの製品Q，Rを製造する
- 製品Q，Rは原液A，Bから生産される
- 利益最大の生産計画は？

	製品Q 1kgあたり	製品R 1kgあたり	使用可能量 kl/日
原液A（kl）	2	1	70
原液B（kl）	3	4	180
利益（千円）	6	4	

【例題4-4】双対問題と緩和問題

- 整理してみよう
- 変数は？
  - 製品Qの製造量をx_1，製品Rの製造量をx_2とする
- 目的は？
  - 利益を最大化する
    - $\max 6x_1 + 4x_2$
- 制約は？
  - 原液Aと原液Bの使用可能量
    - $2x_1 + x_2 \leq 70$ ・・・①
    - $3x_1 + 4x_x \leq 180$ ・・・②
    - $x_1, x_2 \geq 0$
- この問題をソルバーを用いて解くと，$x_1 = 20, x_2 = 30$のとき，最大値240

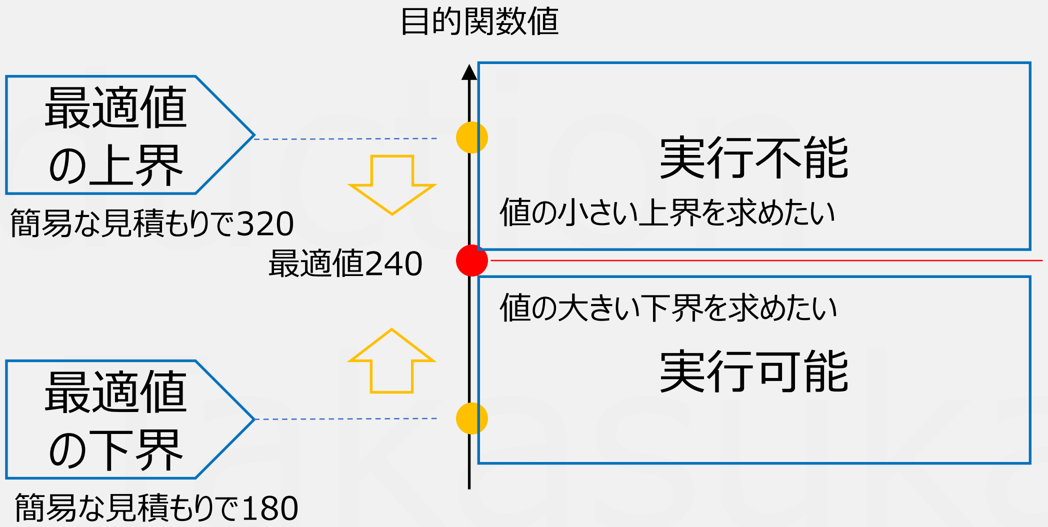
双対問題と緩和問題

- ソルバーを用いる前に，最適値の見積もりをしてみよう
- 制約式①×2+制約式②×1
  - $7x_1 + 6x_2 \leq 320$
  - このとき， $x_1, x_2 \geq 0$より，目的関数$6x_1 + 4x_2 \leq 7x_1 + 6x_2 \leq 320$
- つまり，簡易な見積もりでは，最適値の上界は320
- また，適当な実行可能解を入れると，$x_1 = 10, x_2 = 30$のとき，目的関数値180

双対問題と緩和問題

- ソルバーを用いる前に，最適値の見積もりをしてみよう
- まとめると，

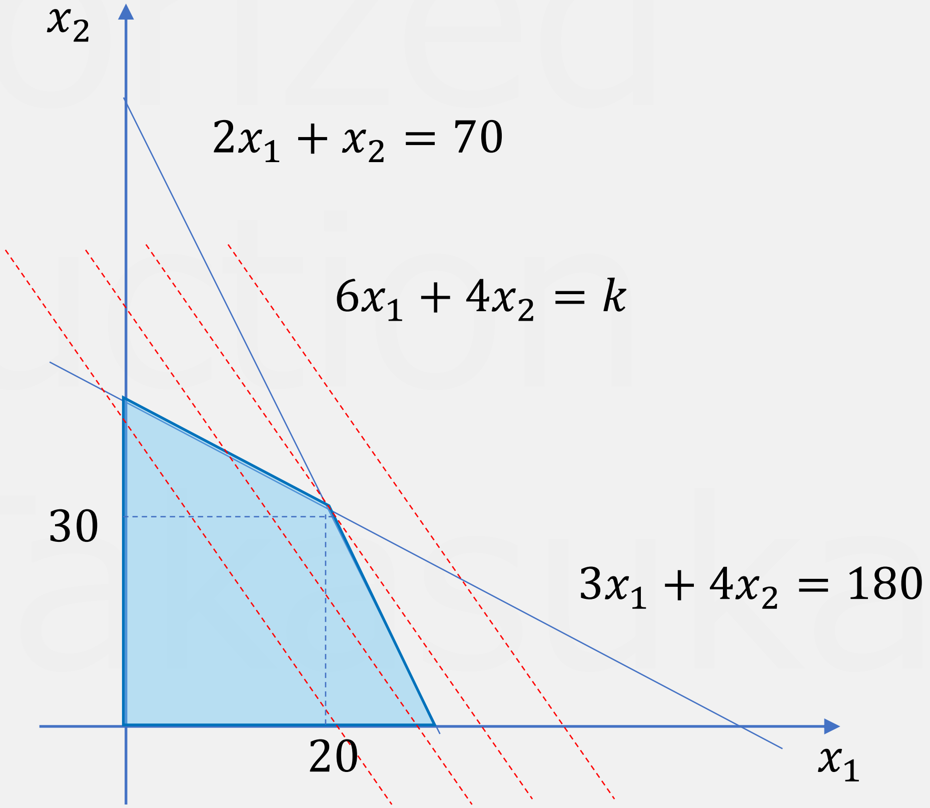
$$\max\ 6x_1 + 4x_1$$
s.t.
$$2x_1 + x_2 \leq 70$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 180$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



双対問題と緩和問題

- ソルバーを用いる前に，最適値の見積もりをしてみよう
- まとめると，

max $6x_1 + 4x_1$
s.t.
$2x_1 + x_2 \leq 70$
$3x_1 + 4x_2 \leq 180$
$x_1, x_2 \geq 0$



【例題4-5】双対問題と緩和問題

- ソルバーを用いる前に，最適値の見積もりをしてみよう
- 各制約式を何倍にするのが適切かを考える
- 制約式①×y_1+制約式②× y_2
- $(2x_1 + x_2)y_1 + (3x_1 + 4x_2)y_2 \leq \boxed{70y_1 + 180y_2}$ これを小さくしたい
- つまり，$(2y_1 + 3y_2)x_1 + (y_1 + 4y_2)x_2 \leq \boxed{70y_1 + 180y_2}$ これを小さくしたい
- 仮に，$2y_1 + 3y_2 \geq 6$，$y_1 + 4y_2 \geq 4$が成立するとすると，

$$6x_1 + 4x_2 \leq (2y_1 + 3y_2)x_1 + (y_1 + 4y_2)x_2 \leq 70y_1 + 180y_2$$

- これは以下問題に置き換えられ，双対問題と呼ぶ

min $70y_1 + 180y_2$
s.t.
$2y_1 + 3y_2 \geq 6$
$y_1 + 4x_2 \geq 4$
$y_1, y_2 \geq 0$

双対問題と緩和問題

- まとめると，以下のような問題（P）と問題（D）が与えられたとき，問題（D）は主問題（P）から見たときの双対問題であり，問題（P）は主問題（D）から見たときの双対問題となる

問題（P）

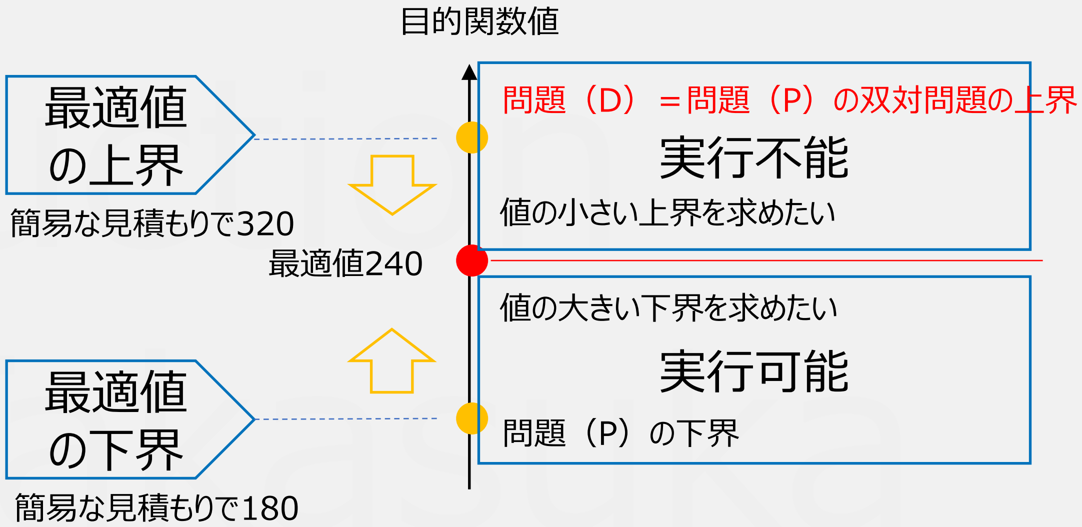
max $6x_1 + 4x_1$
s.t.
$2x_1 + x_2 \leq 70$
$3x_1 + 4x_2 \leq 180$
$x_1, x_2 \geq 0$

問題（D）

min $70y_1 + 180y_2$
s.t.
$2y_1 + 3y_2 \geq 6$
$y_1 + 4x_2 \geq 4$
$y_1, y_2 \geq 0$

主問題 → 双対問題

双対問題 ← 主問題



双対問題と緩和問題

- ソルバーを用いる前に，最適値の見積もりをしてみよう
- まとめると，

$$\min\ 70y_1 + 180y_2$$
s.t.
$$2y_1 + 3y_2 \geq 6$$
$$y_1 + 4x_2 \geq 4$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$