

目次

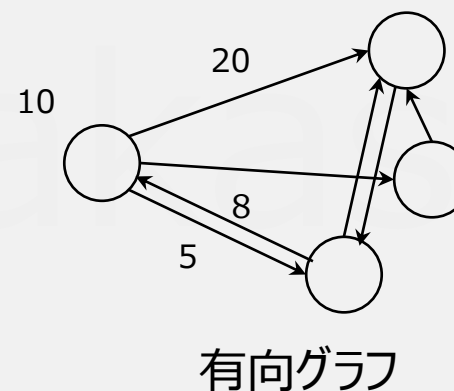
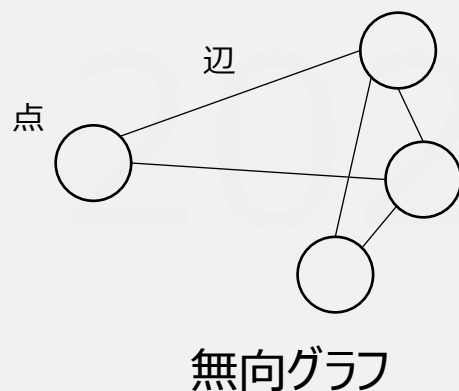
- 第1回 ガイダンス, オペレーションズリサーチとは
- 第2回 最適化問題
- 第3回 連続最適化
- 第4回 組合せ最適化
- 第5回 ネットワーク最適化1
- 第6回 ネットワーク最適化2
- 第7回 シミュレーション1
- 第8回 シミュレーション2
- 第9回 待ち行列理論1
- 第10回 待ち行列理論2
- 第11回 不確実性下での意思決定 (意思決定原理)
- 第12回 不確実性下での意思決定 (ディシジョンツリー・効用)
- 第13回 ゲーム理論
- 第14回 物流2024年問題

グラフとネットワーク

- システムの構成要素間のつながりやネットワーク上におけるものの流れを扱う分野として、グラフやネットワークの理論がある
- 「要素」や「もの」が抽象的に扱われるため、適用範囲が広く、道路や鉄道といった交通網のみならず、コンピュータネットワークやインターネット上におけるソーシャルネットワークの解析等にも用いられている
- 本講義では、ネットワーク理論における基本的な問題として、最短経路問題と最小費用流問題を扱う

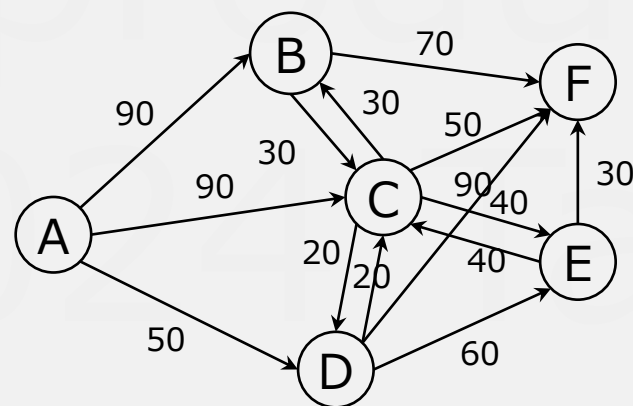
グラフとネットワーク

- いくつかの点（節点, node）とそれらを結ぶ線や矢印（辺, 枝, edge）によって表現される図形をグラフと呼ぶ
- 辺に向きが付けられているグラフを有向グラフ, 付けられていないグラフを無向グラフと呼ぶ
- グラフ上においてもものの流れを考える場合など, 枝や節点が費用や容量, 需要・供給量などの情報をもつときには, ネットワークと呼ばれることもある



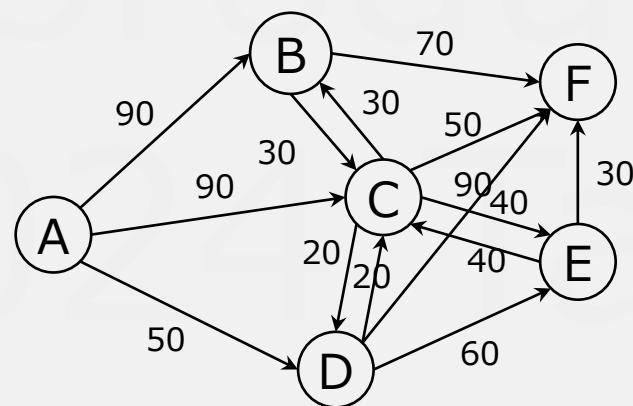
最短路問題

- 最短路問題とは、与えたネットワークに対して、始点と呼ばれる節点から終点と呼ばれる別の節点に至る経路で、時間（または距離や費用）が最小のものを求める問題である。このとき、すべての枝を通る必要はない。



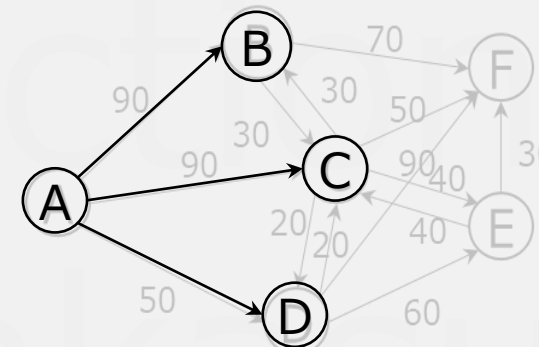
【例題5-1】最短路問題

- 以下のネットワークにおいて，A地点からF地点に至る経路はいくつか存在する．各枝に付けられた数値が2地点間の所要時間（分）を表すとしたとき，**最も早く**A地点からF地点に行くにはどの経路を選択すれば良いか．

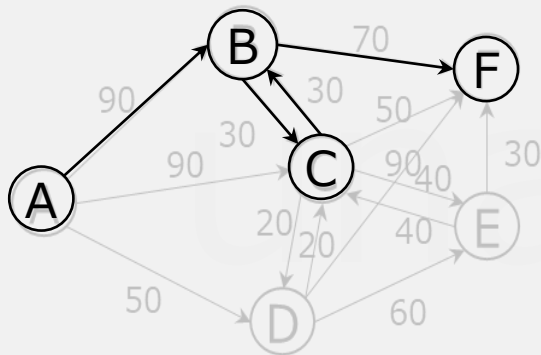


【例題5-1】最短路問題

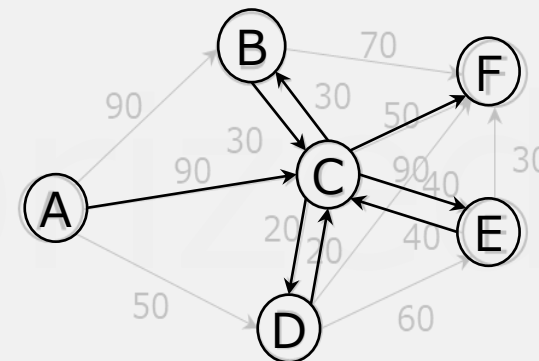
- 整理してみよう
- 変数は？
 - 各枝 (i, j) （節点 i から節点 j への矢印）に対してバイナリ変数 x_{ij} を導入し、枝 (i, j) を経路の一部として使うならば $x_{ij} = 1$ 、使わないならば $x_{ij} = 0$ とする
- 目的は？
 - 長さの最小化
 - $\min 90x_{AB} + 90x_{AC} + 50x_{AD} + 30x_{BC} + 70x_{BF} + 30x_{CB} + 20x_{CD} + 40x_{CE} + 50x_{CF} + 20x_{DC} + 60x_{DE} + 90x_{DF} + 40x_{EC} + 30x_{EF}$
- 制約は？
 - 各節点の入出力数
 - $x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} = 1$
 - $-x_{AB} - x_{CB} + x_{BC} + x_{BF} = 0$
 - $-x_{AC} - x_{BC} - x_{DC} - x_{EC} + x_{CB} + x_{CD} + x_{CE} + x_{CF} = 0$
 - $-x_{AD} - x_{CD} + x_{DC} + x_{DE} + x_{DF} = 0$
 - $-x_{CE} - x_{DE} + x_{EC} + x_{EF} = 0$
 - $-x_{BF} - x_{CF} - x_{DF} - x_{EF} = -1$
 - $x_{ij} \in \{0, 1\}, i, j = A, B, C, \dots, F$
- これを解くと、最適解は $(x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BC}, x_{BF}, x_{CB}, x_{CD}, x_{CE}, x_{CF}, x_{DC}, x_{DE}, x_{DF}, x_{EC}, x_{EF}) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ であり、最短路 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F$ で、長さは120となる



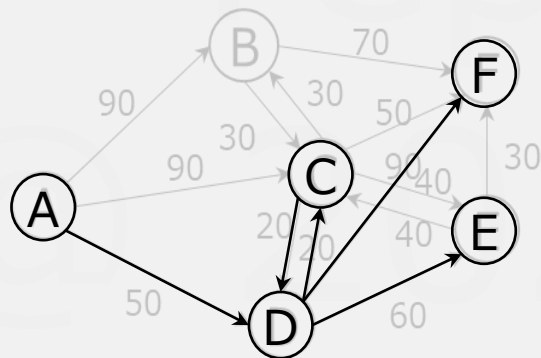
【例題5-1】最短路問題



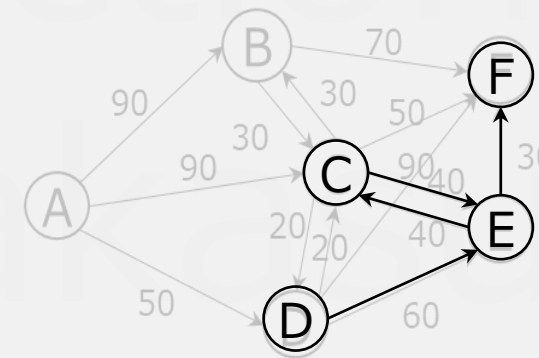
$$-x_{AB} + -x_{CB} + x_{BC} + x_{BF} = 0$$



$$-x_{AC} - x_{BC} - x_{DC} - x_{EC} + x_{CB} + x_{CD} + x_{CE} + x_{CF} = 0$$

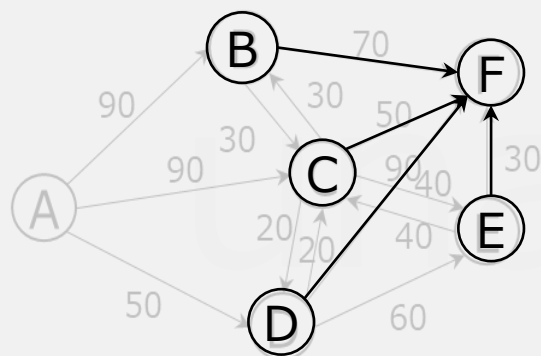


$$-x_{AD} - x_{CD} + x_{DC} + x_{DE} + x_{DF} = 0$$

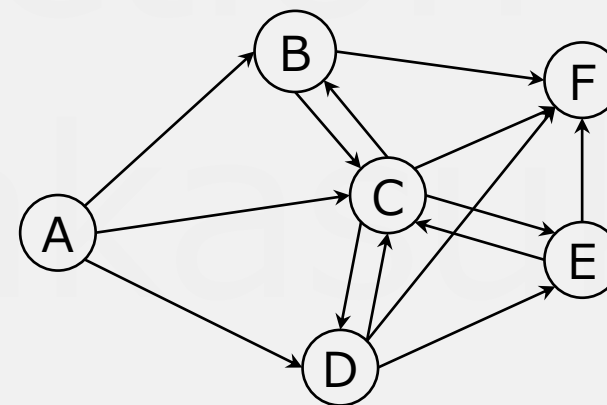


$$-x_{CE} - x_{DE} + x_{EC} + x_{EF} = 0$$

【例題5-1】最短路問題



$$-x_{BF} - x_{CF} - x_{DF} - x_{EF} = -1$$



【例題5-1】最短路問題

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1																									
2		変数		AB	AC	AD	BC	BF	CB	CD	CE	CF	DC	DE	DF	EC	EF								
3				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0								
4																									
5																		純利益							
6		目的	最大化	90	90	50	30	70	30	20	40	50	20	60	90	40	30	0					=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D6:Q6)		
7																									
8																		総使用量		使用可能量					
9		制約	節点A	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0 =		1		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D9:Q9)			
10			節点B	-1	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D10:Q10)			
11			節点C	0	-1	0	-1	0	1	1	1	1	-1	0	0	-1	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D11:Q11)			
12			節点D	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	0	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D12:Q12)			
13			節点E	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	1	1	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D13:Q13)			
14			節点F	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	0 =		-1		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D14:Q14)			

【例題5-1】最短路問題

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)

目標値: ☐ 最大値(M) ☒ 最小値(N) ☐ 指定値:(V)

変数セルの変更:(B)

制約条件の対象:(U)

☒ 制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:
(E)

解決方法
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリュショナリー エンジンを選択してください。

【例題5-1】最短路問題

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1																									
2		変数		AB	AC	AD	BC	BF	CB	CD	CE	CF	DC	DE	DF	EC	EF								
3				0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0								
4																									
5																		純利益							
6		目的	最大化	90	90	50	30	70	30	20	40	50	20	60	90	40	30	120					=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D6:Q6)		
7																									
8																		総使用量		使用可能量					
9		制約	節点A	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	=		1		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D9:Q9)		
10			節点B	-1	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D10:Q10)		
11			節点C	0	-1	0	-1	0	1	1	1	1	-1	0	0	-1	0	0	=		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D11:Q11)		
12			節点D	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	0	0	0	=		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D12:Q12)		
13			節点E	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	1	1	0	=		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D13:Q13)		
14			節点F	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	-1	=		-1		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D14:Q14)		

【例題5-1】最短路問題

- 整理してみよう
- 変数は？
 - 各枝 (i, j) （節点 i から節点 j への矢印）に対してバイナリ変数 x_{ij} を導入し、枝 (i, j) を経路の一部として使うならば $x_{ij} = 1$ 、使わないならば $x_{ij} = 0$ とする
- 目的は？
 - 長さの最小化
 - $\min 90x_{AB} + 90x_{AC} + 50x_{AD} + 30x_{BC} + 70x_{BF} + 30x_{CB} + 20x_{CD} + 40x_{CE} + 50x_{CF} + 20x_{DC} + 60x_{DE} + 90x_{DF} + 40x_{EC} + 30x_{EF}$
- 制約は？
 - 各節点の入出力数
 - $x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} = 1$
 - $-x_{AB} - x_{CB} + x_{BC} + x_{BF} = 0$
 - $-x_{AC} - x_{BC} - x_{DC} - x_{EC} + x_{CB} + x_{CD} + x_{CE} + x_{CF} = 0$
 - $-x_{AD} - x_{CD} + x_{DC} + x_{DE} + x_{DF} = 0$
 - $-x_{CE} - x_{DE} + x_{EC} + x_{EF} = 0$
 - $-x_{BF} - x_{CF} - x_{DF} - x_{EF} = -1$
 - $x_{ij} \geq 0, i, j = A, B, C, \dots, F$
- これを解くと、最適解は $(x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BC}, x_{BF}, x_{CB}, x_{CD}, x_{CE}, x_{CF}, x_{DC}, x_{DE}, x_{DF}, x_{EC}, x_{EF}) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ であり、最短路 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F$ で、長さは120となる

• 各変数 x_{ij} は0または1でなくてはならないため、本来であれば整数制約やバイナリ制約（ $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ）を課するのが自然である
 • 最短路問題の場合は整数制約がなくても整数解が得られることが知られており、さらに、各枝の流量が1を超えることはないため、非負制約（ $x_{ij} \geq 0$ ）のみでよい

【例題5-1】最短路問題

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1																									
2		変数		AB	AC	AD	BC	BF	CB	CD	CE	CF	DC	DE	DF	EC	EF								
3				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0								
4																									
5																		純利益							
6		目的	最大化	90	90	50	30	70	30	20	40	50	20	60	90	40	30	0					=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D6:Q6)		
7																									
8																		総使用量		使用可能量					
9		制約	節点A	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0 =		1		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D9:Q9)			
10			節点B	-1	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D10:Q10)			
11			節点C	0	-1	0	-1	0	1	1	1	1	-1	0	0	-1	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D11:Q11)			
12			節点D	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	0	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D12:Q12)			
13			節点E	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	1	1	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D13:Q13)			
14			節点F	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	0 =		-1		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D14:Q14)			

【例題5-1】最短路問題

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I)

目標値: ☐ 最大値(M) ☒ 最小値(N) ☐ 指定値(V)

変数セルの変更:(B)

制約条件の対象:(U)

\$R\$9:\$R\$14 = \$T\$9:\$T\$14

☒ 制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:
(E)

解決方法
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションナリー エンジンを選択してください。

【例題5-1】最短路問題

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1																									
2		変数		AB	AC	AD	BC	BF	CB	CD	CE	CF	DC	DE	DF	EC	EF								
3				0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0								
4																									
5																		純利益							
6		目的	最大化	90	90	50	30	70	30	20	40	50	20	60	90	40	30	120					=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D6:Q6)		
7																									
8																		総使用量		使用可能量					
9		制約	節点A	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1 =		1		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D9:Q9)			
10			節点B	-1	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D10:Q10)			
11			節点C	0	-1	0	-1	0	1	1	1	1	-1	0	0	-1	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D11:Q11)			
12			節点D	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1	1	1	0	0	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D12:Q12)			
13			節点E	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	1	1	0 =		0		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D13:Q13)			
14			節点F	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	-1 =		-1		=SUMPRODUCT(D\$3:Q\$3,D14:Q14)			

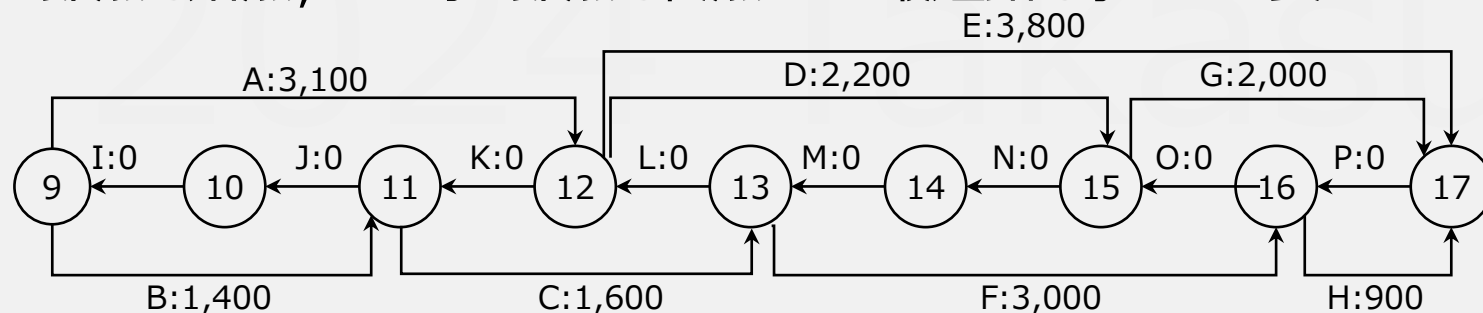
【例題5-2】最短路問題2

- 9時から17時までの警備を契約社員で賄うことにした
- 警備には常時最低1人がいればよい（複数人いても問題はない）
- 候補者は以下の8人であり、それぞれ勤務時間帯と賃金が異なる
- このとき、1日あたりの**総賃金を低く抑える**ためにはどの候補者を選べば良いか

候補者	A	B	C	D	E	F	G	H
勤務時間帯	9～12	9～11	11～13	12～15	12～17	13～16	15～17	16～17
賃金	3,100	1,400	1,600	2,200	3,800	3,000	2,000	900

【例題5-2】最短路問題2

- この問題は、以下のように9節点からなるネットワークを考えることで、最短路問題として解くことができる
 - 各節点は時刻に対応し、候補者は、勤務開始時刻から勤務完了時刻への枝に対応する
 - 隣り合う節点間には、時間を遡る方向に枝が張られている
 - 候補者に対応する枝（前向きの枝）の長さはその人の賃金、それ以外の枝（後ろ向きの枝）の長さは0である
- このネットワーク上で9時の節点から17時の節点に至る経路を考えると、その経路上の枝に対応する候補者を選ぶことで、9時から17時まで間が空くことなく警備をすることができる
- 途中、時間を遡る枝（候補者に対応しない枝）を経由した場合、その時間帯は複数人で警備することになり、経路長が総賃金を表す
- よって、9時の節点を始点、17時の節点を終点として最短路を求めれば良い



【例題5-2】最短路問題2

配布用

【例題5-2】最短路問題2

配布用

【例題5-2】最短路問題2

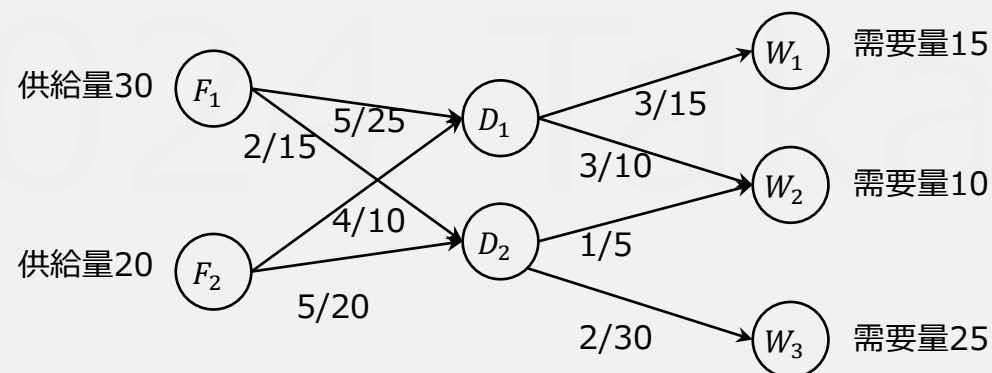
配布用

【例題5-2】最短路問題2

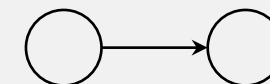
配布用

最小費用流問題

- 節点に供給量や需要量を与えられているネットワーク上において、共有領や需要量を満たすようにものを流すことを考える
- 各枝には容量があり、容量を超える量をその枝に沿って流すことはできない
- 各枝には単位流量あたりの費用を与えられており、流量に比例した費用がかかる
 - 各枝について、その枝を流れる量に変数であり、これを決定する。ただし、流量が容量を超えてはならない（容量制約）。
 - 各接点について、その節点から出ていく量の合計から、入ってくる量の合計を引いた値を考える。供給量を与えられている場合は、この値が供給量に等しく、需要量を与えられている場合は、この値の符号を逆にした（-1をかけた）値が需要量に等しくなくてはならない。また、供給量も需要量も与えられていない場合は、この値は0でなくてはならない。この条件を流量保存則と呼ぶ。
- 最小費用流問題とは、このような状況において総費用を最小化する問題である

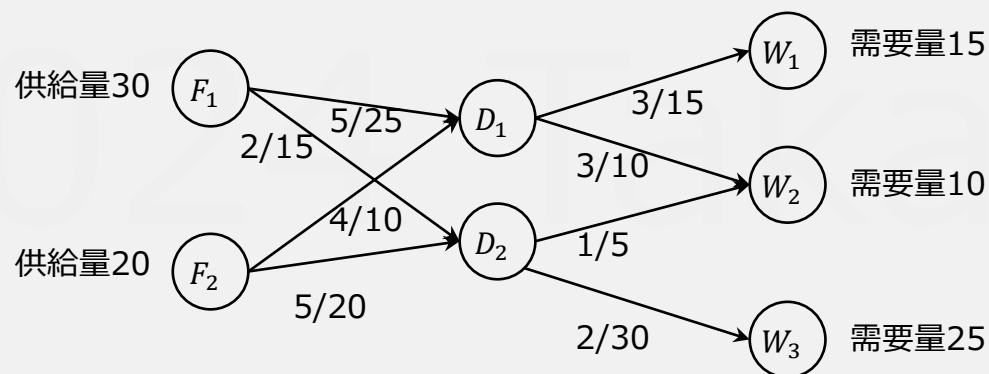


費用/容量



【例題5-3】最小費用流問題

- 2つの工場 F_1, F_2 で製品を生産し、それを3つの倉庫 W_1, W_2, W_3 に分散して保管することを考える
- 工場で生産された製品は、デポ D_1, D_2 いずれかに送られたあと、倉庫に輸送されるものとし、 D_1 から W_1 , D_2 から W_1 ひ製品を輸送することはしないものとする。
- 経路には輸送可能な量が定められており、これを超える量の製品を輸送することはできない
- 向上からデポ、デポから倉庫への輸送費用は、単価×輸送量で決まるものとし、単価は経路（輸送元と輸送先の組合せ）によって異なる
- F_1, F_2 での生産量がそれぞれ30, 20であり、 W_1, W_2, W_3 に送らなくてはならない製品の量がそれぞれ15, 10, 25であるとき、**総費用を最小化**する輸送計画を求めたい



【例題5-3】最小費用流問題

配布用

【例題5-3】最小費用流問題

配布用

【例題5-3】最小費用流問題

配布用

【例題5-3】最小費用流問題

配布用

最小費用流問題

- 需要量, 供給量, 容量がすべて整数であれば, 整数条件がなくても整数解が得られることが知られている
- 最小費用流問題に対しても, 線形計画問題に定式化して解くより効率的な方法が知られている
- 一般に, 節点の集合を V , 枝の集合を A と定義し, 各節点 $i \in V$ の供給量または需要量を b_i (正の場合は供給量, 負の場合は需要量と解釈する), 各枝 $(i, j) \in A$ の費用と容量, さらに流量をそれぞれ c_{ij}, u_{ij}, x_{ij} とおくと, 最小費用流問題は以下のように定式化できる

$$\begin{aligned} \min & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} & \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = b_i, i \in V \\ & \sum_{i \in V} b_i = 0 \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, (i, j) \in A \end{aligned}$$

←供給量の総和と需要量の総和の一致

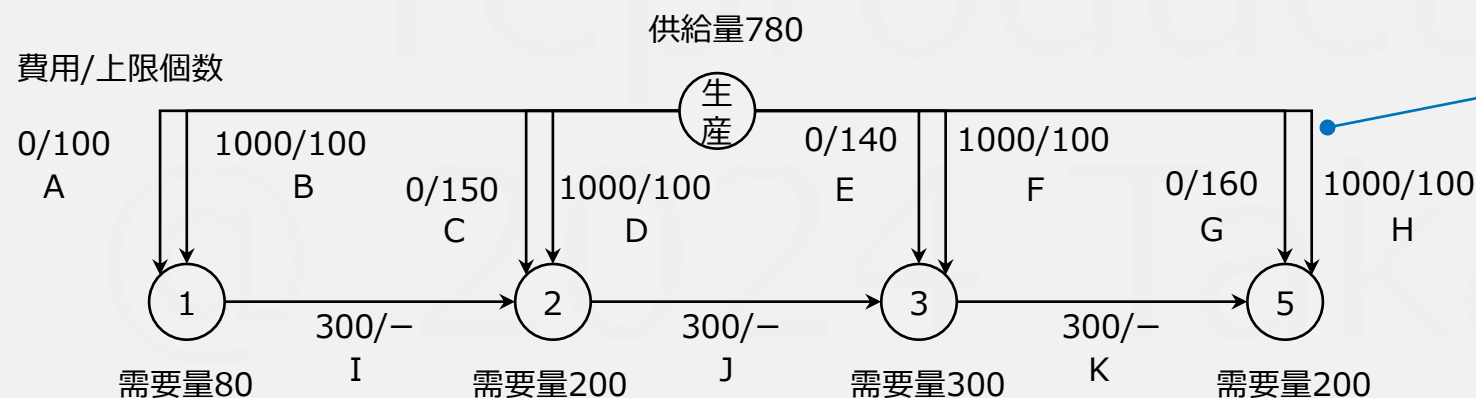
【例題5-4】最小費用流問題2

- ある工場の1月から4月までの月別需要量，および生産能力が以下のように与えられている
- 毎月需要量を満たすように商品の生産を行わなくてはならないが，生産能力が需要量を下回る場合には，「残業する」か「前月までに生産しておく」かのどちらかが必要になる
- ただし，商品の生産を残業で行えば，1個あたり1000円の費用が余分にかかり，また，残業による生産は毎月100個までであるとする
- このとき，**最小費用**で需要量を満たすように生産計画を求めよ

	1月	2月	3月	4月
需要量	80	200	300	200
生産能力	100	150	140	160

【例題5-4】最小費用流問題2

- ある工場の1月から4月までの月別需要量，および生産能力が以下のように与えられている
- 毎月需要量を満たすように商品の生産を行わなくてはならないが，生産能力が需要量を下回る場合には，「残業する」か「前月までに生産しておく」かのどちらかが必要になる
- ただし，商品の生産を残業で行えば，1個あたり1000円の費用が余分にかかり，また，残業による生産は毎月100個までであるとする
- このとき，最小費用で需要量を満たすように生産計画を求めよ



- 節点は，それぞれ1月～4月に対応する4つの節点と，「生産」を表す節点の計5つである
- 「生産」節点から各節点に至る2本の枝は，各月の（通常の）生産と残業による生産にそれぞれ対応し，それら以外の枝は翌月以降に持ち越す量に対応する
- 容量が「-」の枝には容量制約がない（容量が ∞ である）ことを示す

【例題5-4】最小費用流問題2

- 整理してみよう
- 変数は？
 - 各枝 $i \in \{A, B, C, \dots, K\}$ に対してその枝を流れる量（変数）を $x_i \geq 0$ とする
- 目的は？
 - 利益の最大化
 - $\min 1000x_B + 1000x_D + 1000x_F + 1000x_H + 300x_I + 300x_J + 300x_K$
- 制約は？
 - 各節点の入出力数
 - $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G + x_H = 780$
 - $x_A + x_B - x_I = 80$
 - $x_I + x_C + x_D - x_J = 200$
 - $x_J + x_E + x_F - x_K = 300$
 - $x_K + x_G + x_H = 200$
 - $0 \leq x_A \leq 100, 0 \leq x_B \leq 1000, 0 \leq x_C \leq 150, 0 \leq x_D \leq 1000,$
 - $0 \leq x_E \leq 140, 0 \leq x_F \leq 1000, 0 \leq x_G \leq 160, 0 \leq x_H \leq 1000$
 - $0 \leq x_I, 0 \leq x_J, 0 \leq x_K$
- これを解くと、最適解は $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, x_G, x_H, x_I, x_J, x_K) = (100, 0, 100, 80, 150, 150, 140, 60, 20, 0, 0)$ であり、1月に100個、2月に100個残業で80個、3月に150個残業で150個、4月に140個残業で60個生産し、1月から2月への保管は20個、2月から3月への保管は0個、3月から4月への保管は0個すると、最小費用は296,000となる

【例題5-4】最小費用流問題2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1																						
2		変数		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K								
3				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0								
4																						
5															総賃金							
6		目的	最小化	0	1000	0	1000	0	1000	0	1000	300	300	300	0					=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D6:N6)		
7																						
8															総使用量		使用可能量					
9		制約	供給量780	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	=	780		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D9:N9)			
10			需要量80	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	=	80		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D10:N10)			
11			需要量200	0	0	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	=	200		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D11:N11)			
12			需要量300	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	-1	0	=	300		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D12:N12)			
13			需要量200	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	=	200		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D13:N13)			
14			A	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	100		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D14:N14)			
15			B	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1000		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D15:N15)			
16			C	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	100		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D16:N16)			
17			D	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1000		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D17:N17)			
18			E	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	=	150		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D18:N18)			
19			F	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	=	1000		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D19:N19)			
20			G	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	=	140		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D20:N20)			
21			H	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	=	1000		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D21:N21)			

【例題5-4】最小費用流問題2

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I) ↑

目標値: ☐ 最大値(M) ☒ 最小値(N) ☐ 指定値:(V)

変数セルの変更:(B) ↑

制約条件の対象:(U)

追加(A)
変更(C)
削除(D)
すべてリセット(R)
読み込み/保存(L)

☒ 制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択:
(E) ▼ オプション(P)

解決方法
滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプレックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューションナリー エンジンを選択してください。

ヘルプ(H) 解決(S) 閉じる(O)

【例題5-4】最小費用流問題2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1																						
2		変数		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K								
3				100	0	100	80	150	150	140	60	20	0	0								
4																						
5															総賃金							
6		目的	最小化	0	1000	0	1000	0	1000	0	1000	300	300	300	296000					=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D6:N6)		
7																						
8															総使用量		使用可能量					
9		制約	供給量780	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	780	=	780		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D9:N9)			
10			需要量80	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	80	=	80		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D10:N10)			
11			需要量200	0	0	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	200	=	200		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D11:N11)			
12			需要量300	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	-1	300	=	300		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D12:N12)			
13			需要量200	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	200	=	200		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D13:N13)			
14			A	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100	=	100		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D14:N14)			
15			B	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1000		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D15:N15)			
16			C	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	100	=	100		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D16:N16)			
17			D	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	80	=	1000		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D17:N17)			
18			E	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	150	=	150		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D18:N18)			
19			F	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	150	=	1000		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D19:N19)			
20			G	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	140	=	140		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D20:N20)			
21			H	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	60	=	1000		=SUMPRODUCT(D\$3:N\$3,D21:N21)			

最短路問題と最小費用流問題

- 最小費用流問題は、最短路問題を特殊なケースとして含む、より一般的なモデルである
- 実際、始点 s の供給量を1 ($b_s = 1$)、始点 t の需要量を1 ($b_t = -1$)とし、各枝の費用をその時間や長さとするれば、最小費用流を求める問題は、 s から t に至る最短路を求める問題になる
- なお、各枝の容量は $u_{ij} = 1$ としてよけばよいが、設定しなくても ($u_{ij} = \infty$ とみなしても) 構わない
- また、始点 s の供給量を $|V| - 1$ 、その他の節点についてはすべて需要量を1とし、各枝の容量を $|V| - 1$ とすれば、 s から他の各節点を至る最短路をすべて同時に求める問題になる

割当問題と最小費用流問題

- 集合 U の要素を集合 V の要素に割当てるタイプの問題は、 U, V の各要素を節点、割当て可能な組を枝とするネットワーク上の最小費用問題となることが少なくない
- ただし、種々の制約を表現するためには、節点や枝を追加するなどの工夫が必要になる

【演習5-1】割当問題（演習4-6）

- ネットワーク上の最小費用を求めることで、演習4-6の割当問題を解くことを考える

【演習4-6】研究室配属問題

- インターンシップの学生6名を3つの部門A, B, Cに配属させる
- ただし、学生1, 2, 3は理系学部の学生で、学生4, 5, 6は文系学部の学生であるとする
- 配属人数は各部門1から3名であり、理系3名全員、もしくは文系3名全員を同じ部門に配属させることはしないものとする（配属人数が2名で、2名とも理系、あるいは2名とも文系であることは問題ない）
- 各学生の適性判定を行ったところ、以下のような結果になった。点数が高いほど適正があることを表し、「-」は不適正（配属不可）を表す。
- 学生の平均適性点数を最大化するには、どのように配属させれば良いか。

	学生1	学生2	学生3	学生4	学生5	学生6
部門A	8	7	5	5	-	2
部門B	6	3	-	8	6	6
部門C	5	-	3	-	4	3

【演習4-6】研究室配属問題

- 整理してみよう
- 変数は？
 - 学生 i ($i = 1, 2, \dots, 6$)と配属可能な部門 $j \in \{A, B, C\}$ の組に対し、学生 i を部門 j に配属するとき $x_{ij} = 1$ とし、配属しないとき $x_{ij} = 0$ とする
- 目的は？
 - 総点数の最大化
 - $$\max \frac{1}{6}(8x_{1A} + 6x_{1B} + 5x_{1C} + 7x_{2A} + 3x_{2B} + 5x_{3A} + 3x_{3C} + 5x_{4A} + 8x_{4B} + 6x_{5B} + 4x_{5C} + 2x_{6A} + 6x_{6B} + 3x_{6C})$$
- 制約は？
 - 各学生の配属数の上限
 - $x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 1$
 - $x_{2A} + x_{2B} = 1$
 - $x_{2A} + x_{2C} = 1$
 - $x_{4A} + x_{4B} = 1$
 - $x_{5B} + x_{5C} = 1$
 - $x_{6A} + x_{6B} + x_{6C} = 1$
 - $x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, 6, j \in \{A, B, C\}$
 - 各部門の配属人数
 - $1 \leq x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} + x_{6A} \leq 3$
 - $1 \leq x_{1B} + x_{2B} + x_{4B} + x_{5B} + x_{6B} \leq 3$
 - $1 \leq x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{6C} \leq 3$
 - 理系/文系全員を同じ部門に配属させない
 - $x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 2$
 - $x_{4B} + x_{5B} + x_{6B} \leq 2$
- これを解くと、学生1, 2を部門A、学生4, 6を部門B、学生3, 5を部門Cにそれぞれ配属させたとき、平均適性点数は6で最大となる
- これを解くと、学生2, 3を部門A、学生1, 4, 6を部門B、学生5を部門Cにそれぞれ配属させたとき、平均適性点数は6で最大となる

【演習5-1】割当問題（演習4-6）

配布用

【演習5-1】割当問題（演習4-6）

配布用

【演習5-1】割当問題（演習4-6）

配布用

【演習5-1】割当問題（演習4-6）

配布用

【演習5-1】割当問題（演習4-6）

配布用

【演習5-1】割当問題（演習4-6）

配布用

【演習5-1】割当問題（演習4-6）

配布用