目次

- 第1回　ガイダンス，オペレーションズリサーチとは
- 第2回　最適化問題
- 第3回　連続最適化
- 第4回　組合せ最適化
- 第5回　ネットワーク最適化1
- 第6回　ネットワーク最適化2
- 第7回　シミュレーション1
- 第8回　シミュレーション2
- 第9回　待ち行列理論1
- 第10回　待ち行列理論2
- 第11回　不確実性下での意思決定（意思決定原理）
- 第12回　不確実性下での意思決定（ディシジョンツリー・効用）
- 第13回　ゲーム理論
- 第14回　物流2024年問題

シミュレーションとは

- 「シミュレーション」という用語は元々「まねること」を意味しており，そこから「模擬実験をすること」，さらには「社会現象や物理現象などの現実現象をコンピュータ上で再現し，解明しようとすること」を意味するようになったと言われている
- 乱数を用いない計算の繰り返しによるシミュレーション（決定論的シミュレーション）と乱数を用いたシミュレーション技法であるモンテカルロ法を扱う

【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

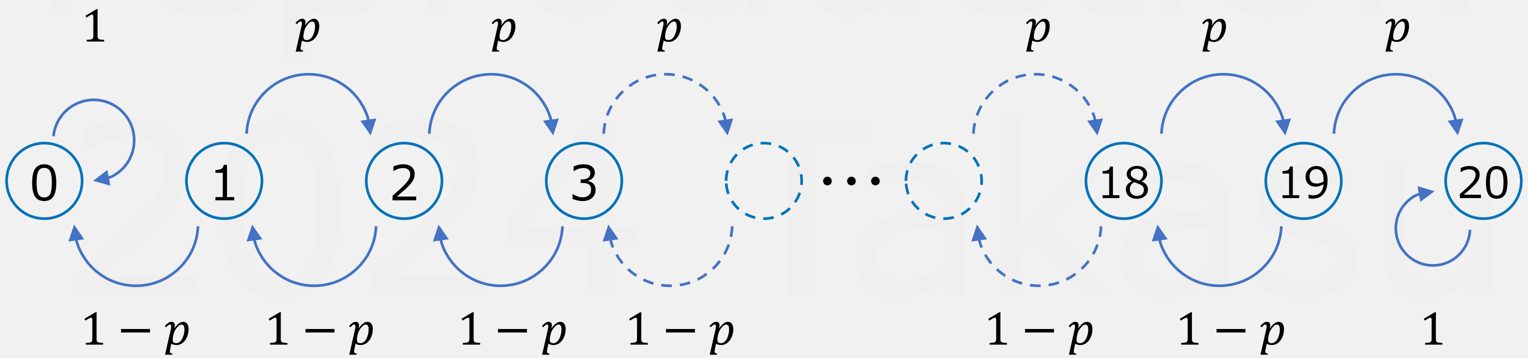
- 自分と相手の2人で賭けを繰り返し行う状況を考える
- それぞれの賭けにおいて，自分が勝つ確率はp，相手が勝つ確率は $1-p$ で一定とする
- 最初，自分がa 枚，相手が$b=20-a$ 枚のチップを持っており，賭けに負けたほうが勝ったほうにチップを1枚渡すとして，自分か相手のどちらかのチップの枚数が0になるまで（破産するまで）賭けは続くものとする
- このとき，確率p や初めのチップの枚数a, b の値によって，自分が破産する確率がどのように変化するか調べたい．例えば，$p=0.6, a=5, b=15$ のとき，自分が破産する確率はどの程度と考えられるか．

【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

- n 回目の賭けが終了した時点での自分のチップ枚数をX_n とすると，X_n は0 以上$a+b(=20)$ 以下のいずれかの整数値をとる
- 便宜上，どちらかが破産した後も賭けは続くものとし，その場合，チップの受け渡しは行わないとする．つまり，一旦$X_n=0$ もしくは$X_n=20$ となったら，その後X_n の値は変化しないと考える．
- $X_n=a$ （賭け始める前の自分のチップの枚数）とする
- X_n は確率変数であり，X_n がどのような値をとるかは一意に定まらないが，どの値をどのような確率でとるか（つまり，X_n の確率分布）を計算することはできる．言い換えると，n 回目の賭けが終了した時点で自分のチップの枚数がi である確率$\mathrm{P}(X_n=i)$ は計算することができる．

【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

- n の時点で$X_n = 0$ であるとすれば，すでに自分は破産しているため，$n+1$ の時点においても$X_{n+1} = 0$ である．逆に$X_n = 20$ であれば，$X_{n+1} = 20$ である．
- $X_n = i\ (1 \leq i \leq 19)$ の場合は，賭けの結果によってX_{n+1} の値は異なり，確率p で$i+1$ ，確率$1-p$ で$i-1$ となる

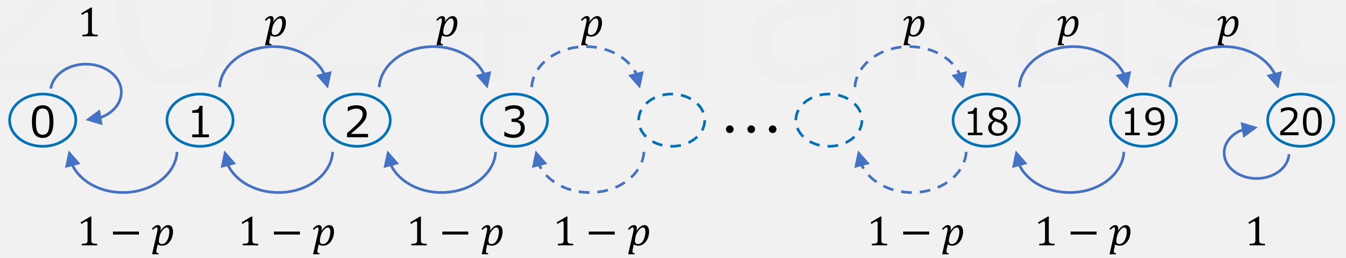


【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

- このグラフにおいて，各節点i はチップの枚数に対応している
- 枝(i,j) は，$X_n = i$ のときに$X_{n+1} = j$ となり得ることを表しており，それに付随する値が条件付き確率$\mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ である
- これより，$\mathrm{P}(X_n = i) = p_n(i)$ とおくと，

$$p_{n+1}(0) = p_n(0) + (1-p) * p_n(1)$$
$$p_{n+1}(1) = (1-p) * p_n(2)$$
$$p_{n+1}(i) = p * p_n(i-1) + (1-p) * p_n(i+1), i = 2,3,\ldots,18$$
$$p_{n+1}(19) = p * p_n(18)$$
$$p_{n+1}(20) = p * p_n(19) + p_n(20)$$

が成り立つ



【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

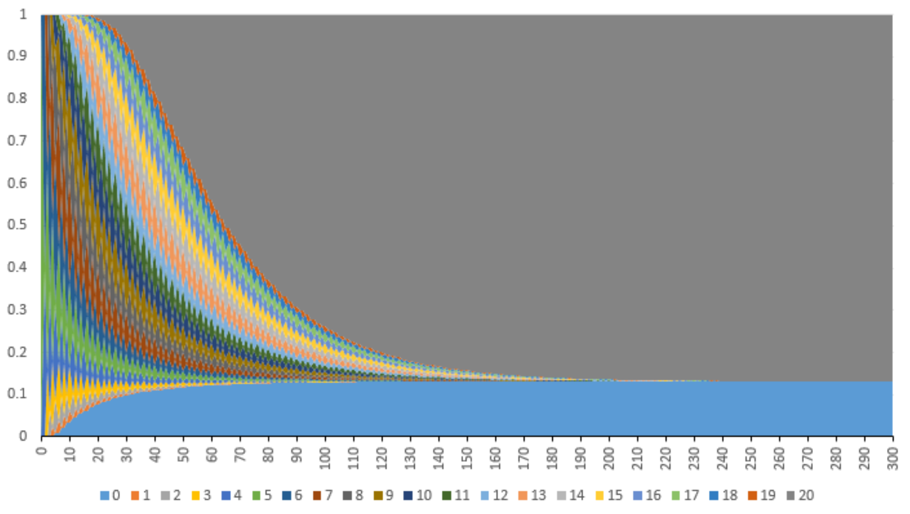
- $p = 0.6, a = 5$ のときの$p_n(i)$ の値をエクセルにて計算する
- 縦方向に$n = 0, 1, \ldots$ を，横方向に$i = 0,1, \ldots, 20$ をとっている
  - p の値をセルB1に入力しておく
  - $n = 0$ の行のセルについて， $a = 5$ であるから， $p_0(5)$ に対応するセルG4には1 を，その他のセルには0 を入力する
  - $n = 1$ の行のセルは，
    - $p_1(0) = p_0(0) + (1 - p) * p_0(1)$ であるため，セルB5には，計算式=B4+(1-$B$1)*C4 を入力する
    - $p_1(1) = (1 - p) * p_0(2)$ であるため，セルC5には，計算式=(1-$B$1)*D4
    - $p_1(i) = p * p_0(i - 1) + (1 - p) * p_0(i + 1), i = 2,3, \ldots, 18$ であるため，セルD5からT5には，計算式=$B$1*C4+(1-$B$1)*E4を入力する
    - $p_1(19) = p * p_0(18)$ であるため，セルU5には，計算式=$B$1*T4を入力する
    - $p_1(20) = p * p_0(19) + p_0(20)$ であるため，セルV5には，計算式=$B$1*U4+V4を入力する
  - $n \geq 2$ の行についても， $n = 1$ の行と同じ計算式によって，1つ上の行のセルの値から$p_n(i)$ の値を計算できるため，セル範囲B5:V5を下方向にコピーすればよい

【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

p	0.6

n\i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0.4	0	0.6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0.2	0	0.5	0	0.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.1	0	0.3	0	0.4	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.2	0	0.3	0	0.3	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0.1	0	0.2	0	0.3	0	0.3	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0.1	0	0.3	0	0.3	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0.1	0	0.2	0	0.3	0	0.3	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0.1	0	0.2	0	0.3	0	0.2	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0.1	0	0.2	0	0.3	0	0.3	0	0.2	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0.1	0	0.2	0	0.3	0	0.2	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0
13	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0.1	0	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0
15	0.1	0	0	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0	0
16	0.1	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0
17	0.1	0	0	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0	0
18	0.1	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0
19	0.1	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0	0
20	0.1	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0
21	0.1	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0
22	0.1	0	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0
23	0.1	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0
24	0.1	0	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0	0
25	0.1	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0
26	0.1	0	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0	0
27	0.1	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.2	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0	0	0
28	0.1	0	0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	0	0

n\i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
0	P0(0)	P0(1)	P0(2)	P0(3)	P0(4)	P0(5)	P0(6)	P0(7)	P0(8)	P0(9)	P0(10)	P0(11)	P0(12)	P0(13)	P0
1	P1(0)	P1(1)	P1(2)	P1(3)	P1(4)	P1(5)	P1(6)	P1(7)	P1(8)	P1(9)	P1(10)	P1(11)	P1(12)	P1(13)	P1
2	P2(0)	P2(1)	P2(2)	P2(3)	P2(4)	P2(5)	P2(6)	P2(7)	P2(8)	P2(9)	P2(10)	P2(11)	P2(12)	P2(13)	P2
3	P3(0)	P3(1)	P3(2)	P3(3)	P3(4)	P3(5)	P3(6)	P3(7)	P3(8)	P3(9)	P3(10)	P3(11)	P3(12)	P3(13)	P3
4	P4(0)	P4(1)	P4(2)	P4(3)	P4(4)	P4(5)	P4(6)	P4(7)	P4(8)	P4(9)	P4(10)	P4(11)	P4(12)	P4(13)	P4
5	P5(0)	P5(1)	P5(2)	P5(3)	P5(4)	P5(5)	P5(6)	P5(7)	P5(8)	P5(9)	P5(10)	P5(11)	P5(12)	P5(13)	P5
6	P6(0)	P6(1)	P6(2)	P6(3)	P6(4)	P6(5)	P6(6)	P6(7)	P6(8)	P6(9)	P6(10)	P6(11)	P6(12)	P6(13)	P6
7	P7(0)	P7(1)	P7(2)	P7(3)	P7(4)	P7(5)	P7(6)	P7(7)	P7(8)	P7(9)	P7(10)	P7(11)	P7(12)	P7(13)	P7
8	P8(0)	P8(1)	P8(2)	P8(3)	P8(4)	P8(5)	P8(6)	P8(7)	P8(8)	P8(9)	P8(10)	P8(11)	P8(12)	P8(13)	P8
9	P9(0)	P9(1)	P9(2)	P9(3)	P9(4)	P9(5)	P9(6)	P9(7)	P9(8)	P9(9)	P9(10)	P9(11)	P9(12)	P9(13)	P9
10	P10(0)	P10(1)	P10(2)	P10(3)	P10(4)	P10(5)	P10(6)	P10(7)	P10(8)	P10(9)	P10(1(	P10(11	P10(12	P10(13	P1



【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

- 自分が破産する確率を調べるためには， $p_n(0)$ の値を見ればよい
- 例えば，100回目の賭けが終了したときに着目すると， $p_{100}(0) = 0.129$ より，この時点で自分が破産している確率は12.9%であることがわかる
- また， $p_{100}(20) = 0.738$ より，相手が破産している確率は73.8%であり，残りの確率13.3%（$1 - p_{100}(0) - p_{100}(20) = \sum_{i=1}^{19} p_{100}(i) = 0.133$）で賭けがまだ続いていることになる
- $p_n(0)$ と$p_n(20)$ の値は， n を大きくしていくにつれて増加していくが， $n = 300$ の時点でほぼ収束している（勝負がついている）
- $p_{300}(0) = 0.131$ より，自分が破産する確率は13%程度であるといえる
- このように，ある時点での様子（「状態」と呼ぶ）が，その直前の状態によって定まるようなモデルをマルコフ過程という
- とくに，とり得る状態が離散的である場合，マルコフ連鎖という

【演習7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

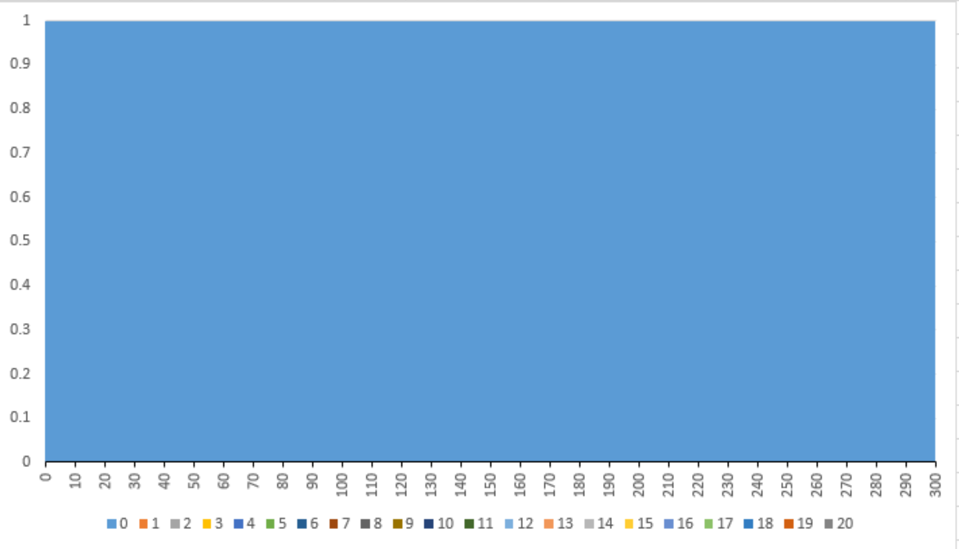
- $p = 0.45, a + b = 20$　のとき，自分が破産する確率を50%以下に抑えるためには，a をいくつ以上に設定すればよいか

【演習7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

p	0.5

n\i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

n\i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	P0(0)	P0(1)	P0(2)	P0(3)	P0(4)	P0(5)	P0(6)	P0(7)	P0(8)	P0(9)	P0(10)	P0(11)	P0(12
1	P1(0)	P1(1)	P1(2)	P1(3)	P1(4)	P1(5)	P1(6)	P1(7)	P1(8)	P1(9)	P1(10)	P1(11)	P1(12
2	P2(0)	P2(1)	P2(2)	P2(3)	P2(4)	P2(5)	P2(6)	P2(7)	P2(8)	P2(9)	P2(10)	P2(11)	P2(12
3	P3(0)	P3(1)	P3(2)	P3(3)	P3(4)	P3(5)	P3(6)	P3(7)	P3(8)	P3(9)	P3(10)	P3(11)	P3(12
4	P4(0)	P4(1)	P4(2)	P4(3)	P4(4)	P4(5)	P4(6)	P4(7)	P4(8)	P4(9)	P4(10)	P4(11)	P4(12
5	P5(0)	P5(1)	P5(2)	P5(3)	P5(4)	P5(5)	P5(6)	P5(7)	P5(8)	P5(9)	P5(10)	P5(11)	P5(12
6	P6(0)	P6(1)	P6(2)	P6(3)	P6(4)	P6(5)	P6(6)	P6(7)	P6(8)	P6(9)	P6(10)	P6(11)	P6(12
7	P7(0)	P7(1)	P7(2)	P7(3)	P7(4)	P7(5)	P7(6)	P7(7)	P7(8)	P7(9)	P7(10)	P7(11)	P7(12
8	P8(0)	P8(1)	P8(2)	P8(3)	P8(4)	P8(5)	P8(6)	P8(7)	P8(8)	P8(9)	P8(10)	P8(11)	P8(12
9	P9(0)	P9(1)	P9(2)	P9(3)	P9(4)	P9(5)	P9(6)	P9(7)	P9(8)	P9(9)	P9(10)	P9(11)	P9(12
10	P10(0)	P10(1)	P10(2)	P10(3)	P10(4)	P10(5)	P10(6)	P10(7)	P10(8)	P10(9)	P10(1	P10(11	P10(1



【演習7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

配布用

【演習7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

配布用

【演習7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

配布用

【演習7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

配布用

【演習7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

配布用

【演習7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

配布用

【演習7-2】決定論的シミュレーション 破産の確率

- それぞれの賭けにおいて，「引き分け」がある場合を考える．引き分けの場合，チップの受け渡しは発生しないとする．また，自分が勝つ確率を$p (0 < p < 0.5)$，空いたが勝つ確率も$p (0 < p < 0.5)$ として，確率$1 - 2p$ で引き分けとする． $p = 0.4, a = b = 10$ のとき，100回目の賭けが終了した時点でどちらも破産していない確率を求めよ

【演習7-2】決定論的シミュレーション 破産の確率

配布用

【演習7-2】決定論的シミュレーション 破産の確率

配布用

【例題7-2】決定論的シミュレーション 在庫管理

- ある商品の在庫管理は，毎日の終わりに在庫を調べ，在庫量x 個がsを下回っていたら，在庫量がS になるように発注する（すなわち，$S-x$ 個を発注する）という方法で行われている（このような在庫管理方式を (s,S) 方策と呼ぶ）
- ここで，発注した商品は翌朝までに納入されるものとする
- いま，この商品を1日あたりの需要量が「0個」「1個」「2個」「3個」「4個」「5個以上」である確率がそれぞれ0.6，0.2，0.05，0.03，0.02であるとして，$s=2, S=5$ に設定する．このとき，発注する頻度はどの程度になるか．なお，在庫切れの場合，その需要は損なわれる（追加発注などはしない）ものとする．

【例題7-2】決定論的シミュレーション 在庫管理

- n 日目が終わる時点での在庫量をX_n とすると， X_n は，0以上5以下のいずれかの整数値をとる確率変数である
- また， $X_n = i$ のときに$X_{n+1} = j$ となる確率$\mathrm{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ を行列の形にまとめると以下のとおりである

    - $$P = \begin{array}{c|c} {}_{i}\diagdown^{j} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \; x_{n+1} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ x_n \end{array} & \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.05 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.02 & 0.03 & 0.05 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.05 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0.02 & 0.03 & 0.05 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}$$

- 2個以下のとき5個まで補充する
- 0個のとき，翌日5個まで補充され，その日0個，1個，2個，3個，4個，5個となる確率は，それぞれ，0.02（需要量が5個である確率），0.03（需要量が4個である確率），0.05 （需要量が3個である確率），0.1（需要量が2個である確率），0.2 （需要量が1個である確率），0.6 （需要量が0個である確率）
- 1個のときも上記同様
- 2個のとき補充なし．よって，0個になる確率は需要量が2以上の確率で0.2，1個になる確率は需要量が1である確率で0.2， 2個になる確率は需要量が0である確率で0.2.
- 3個のとき補充なし．よって，0個になる確率は需要量が3以上の確率で0.1，1個になる確率は需要量が2である確率で0.1， 2個になる確率は需要量が1である確率で0.2，3個になる確率は需要量が0である確率で0.6.
- 4個のとき補充なし．よって，0個になる確率は需要量が4以上の確率で0.05，1個になる確率は需要量が3である確率で0.05， 2個になる確率は需要量が2である確率で0.1，3個になる確率は需要量が1である確率で0.2，4個になる確率は需要量が0である確率で0.6.
- 5個のとき補充なし．よって，0個になる確率は需要量が5以上の確率で0.02，1個になる確率は需要量が4である確率で0.03， 2個になる確率は需要量が3である確率で0.05，3個になる確率は需要量が2である確率で0.1，4個になる確率は需要量が1である確率で0.2，5個になる確率は需要量が0である確率で0.6.

- この行列P の(i, j) 成分が$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ を表す
- $P(X_n = i) = p_n(i)$ とおくと，
    - $\begin{pmatrix} p_{n+1}(0) & p_{n+1}(1) & \cdots & p_{n+1}(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n(0) & p_n(1) & \cdots & p_n(5) \end{pmatrix} P$

  が成り立つ
- つまり， $p_n(i)$ を$i = 0$ から5まで横に並べた1×6行列（行ベクトル）にP を右から掛けることで， $p_{n+1}(i)$ の値が得られる

【演習7-2】決定論的シミュレーション 在庫管理

- $X_0 = 5$ として，n 日目が終わる時点での在庫量X_n の分布をエクセルを用いて計算しなさい（行列の積はMMULT関数で計算することができる）
- n が十分大きいときの，$X_n < 2$ である確率および平均発注間隔を求めよ
- X_0 の値が5以外の場合に，上記結果がどのようになるか確認せよ

【演習7-2】決定論的シミュレーション 在庫管理

配布用

【演習7-2】決定論的シミュレーション 在庫管理

配布用

【演習7-2】決定論的シミュレーション 在庫管理

配布用

モンテカルロ法

- モンテカルロ法とは，乱数を用いたシミュレーション技法の総称である
- 狭い意味では，ある道の値を，ある確率分布や確率過程の未知のパラメータとして捉え，これを無作為兵法抽出により統計的に推定しようとする方法のことを指す

【例題7-3】モンテカルロ法 破産の確率

- 例題7-1について，コンピュータ上で賭けを模擬し，チップの枚数が実際どのように変化していくかを考える

【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

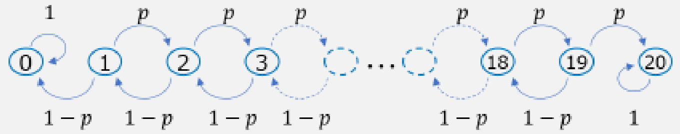
- 自分と相手の2人で賭けを繰り返し行う状況を考える
- それぞれの賭けにおいて，自分が勝つ確率はp，相手が勝つ確率は $1-p$ で一定とする
- 最初，自分がa 枚，相手が$b=20-a$ 枚のチップを持っており，賭けに負けたほうが勝ったほうにチップを1枚渡すとして，自分か相手のどちらかのチップの枚数が0になるまで（破産するまで）賭けは続くものとする
- このとき，確率p や初めのチップの枚数a, b の値によって，自分が破産する確率がどのように変化するか調べたい．例えば，$p=0.6, a=5, b=15$ のとき，自分が破産する確率はどの程度と考えられるか．

【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

- このグラフにおいて，各節点i はチップの枚数に対応している
- 枝(i,j) は， $X_n=i$ のときに$X_{n+1}=j$ となり得ることを表しており，それに付随する値が条件付き確率$\mathrm{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)$ である
- これより， $\mathrm{P}(X_n=i)=p_n(i)$ とおくと，

$$p_{n+1}(0)=p_n(0)+(1-p)*p_n(1)$$
$$p_{n+1}(1)=(1-p)*p_n(2)$$
$$p_{n+1}(i)=p*p_n(i-1)+(1-p)*p_n(i+1), i=2,3,\dots,18$$
$$p_{n+1}(19)=p*p_n(18)$$
$$p_{n+1}(20)=p*p_n(19)+p_n(20)$$

が成り立つ

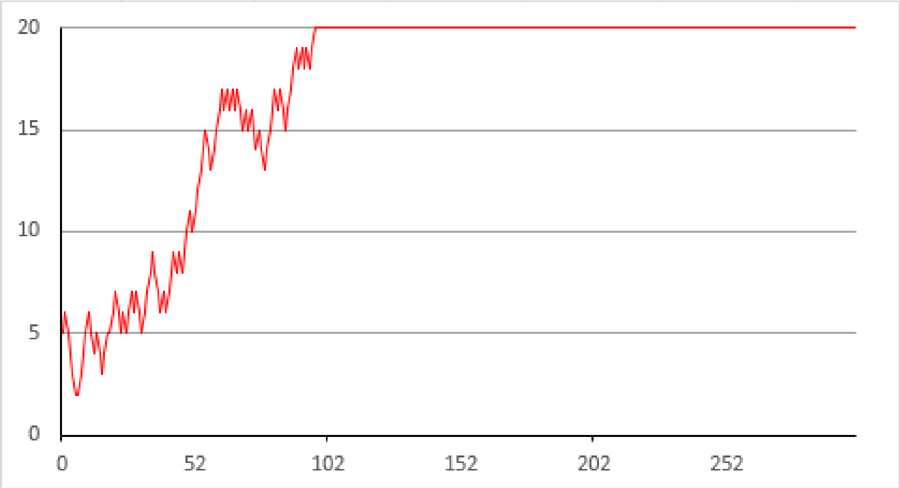


【例題7-3】モンテカルロ法 破産の確率

- セルB1とB2に，自分が勝つ確率p の値とチップの初期枚数a の値を入力
- セルB6に，初期枚数a を参照する計算式=B2を入力
- セルB7以降には，1つ上のセルの値（直前の枚数）をX として，$X = 0$ であれば0を，$X = 20$ であれば20を，$1 \leq X \leq 19$ であれば賭けの結果に応じて$X + 1$ または$X - 1$ の値を返す計算式を入力．セルB7には計算式=IF(B6=0,0,IF(B6=20,20,IF(RAND()<$B$1,B6+1,B6-1)))であり，これを下方向にコピーすることで同じ計算式が入力される．ここで，RAND関数は0以上1未満の一様乱数を生成する関数であり，勝つ確率がp の賭けを模擬するために，RAND関数で乱数を生成し，その値がp 未満であれば勝ち，p 以上であれば負けとみなしている．
- セルD5には計算式=IF(B306=0,1,0)を入力．このセルは，300回目の賭けが終了した時点のチップ枚数が0であれば（自分が破産していれば）1，そうでなければ（相手が破産しているか，または賭けが継続中であれば）0を示している
- 乱数の生成には，F9（キーボードの設定によってはFnキーを押しながらF9）を押す．この機能も用いることで，シミュレーションを繰り返し行うことができる．F9以外にも，エクセルを更新する場合も，乱数は自動生成される．設定で，自動生成の機能をオフにすることもできる（説明は割愛）．

【例題7-3】モンテカルロ法 破産の確率

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	確率p	0.6														
2	初期枚数a	5														
3																
4	シミュレーション			結果												
5	回数	チップ枚数		0												
6	0	5		1:自分が破産												
7	1	6		0:相手が破産または賭け継続中							=B2					
8	2	5									=IF(B6=0,0,IF(B6=20,20,IF(RAND()<$B$1,B6+1,B6-1)))					
9	3	4									=IF(B8=0,0,IF(B8=20,20,IF(RAND()<$B$1,B8+1,B8-1)))					
10	4	3									=IF(B9=0,0,IF(B9=20,20,IF(RAND()<$B$1,B9+1,B9-1)))					
11	5	2									=IF(B10=0,0,IF(B10=20,20,IF(RAND()<$B$1,B10+1,B10-1)))					
13	7	2									=IF(B12=0,0,IF(B12=20,20,IF(RAND()<$B$1,B12+1,B12-1)))					
14	8	3									=IF(B13=0,0,IF(B13=20,20,IF(RAND()<$B$1,B13+1,B13-1)))					
15	9	4									=IF(B14=0,0,IF(B14=20,20,IF(RAND()<$B$1,B14+1,B14-1)))					
16	10	5									=IF(B15=0,0,IF(B15=20,20,IF(RAND()<$B$1,B15+1,B15-1)))					
17	11	6									=IF(B16=0,0,IF(B16=20,20,IF(RAND()<$B$1,B16+1,B16-1)))					
18	12	5									=IF(B17=0,0,IF(B17=20,20,IF(RAND()<$B$1,B17+1,B17-1)))					
19	13	4									=IF(B18=0,0,IF(B18=20,20,IF(RAND()<$B$1,B18+1,B18-1)))					



信頼区間の計算

- シミュレーションをN 回繰り返せば，シミュレーションの結果として観測値（上の例題では自分が破産しているか否か）がN 個得られる．
- これらを，平均μ の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさN の標本を捉えれば，μ の95%信頼区間は，N 個の観測値の平均値を$\bar{x}$ （AVERAGE関数で計算），標準偏差をs （STDEV.S関数で計算）として，おおよそ$(\bar{x}-\frac{2.0s}{\sqrt{N}},\bar{x}+\frac{2.0s}{\sqrt{N}})$ で与えられる．ここで，N は100程度以上を想定している．

【例題7-4】信頼区間の計算 破産の確率

- 例題7-1について，Excelシート上で繰り返し乱数を生成してシミュレーションを実行し，その結果を記録することで，自分が破産する確率の信頼区間を推定せよ

【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

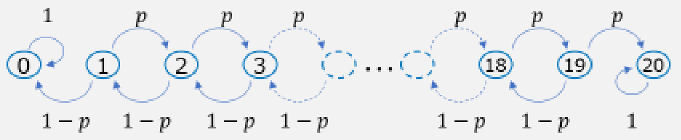
- 自分と相手の2人で賭けを繰り返し行う状況を考える
- それぞれの賭けにおいて，自分が勝つ確率はp，相手が勝つ確率は$1-p$ で一定とする
- 最初，自分がa 枚，相手が$b=20-a$ 枚のチップを持っており，賭けに負けたほうが勝ったほうにチップを1枚渡すとして，自分か相手のどちらかのチップの枚数が0になるまで（破産するまで）賭けは続くものとする
- このとき，確率p や初めのチップの枚数a,b の値によって，自分が破産する確率がどのように変化するか調べたい．例えば，$p=0.6, a=5, b=15$ のとき，自分が破産する確率はどの程度と考えられるか．

【例題7-1】決定論的シミュレーション 破産の確率

- このグラフにおいて，各節点i はチップの枚数に対応している
- 枝(i,j) は，$X_n=i$ のときに$X_{n+1}=j$ となり得ることを表しており，それに付随する値が条件付き確率$\mathrm{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)$ である
- これより，$\mathrm{P}(X_n=i)=p_n(i)$ とおくと，

$$p_{n+1}(0)=p_n(0)+(1-p)*p_n(1)$$
$$p_{n+1}(1)=(1-p)*p_n(2)$$
$$p_{n+1}(i)=p*p_n(i-1)+(1-p)*p_n(i+1), i=2,3,\ldots,18$$
$$p_{n+1}(19)=p*p_n(18)$$
$$p_{n+1}(20)=p*p_n(19)+p_n(20)$$

が成り立つ



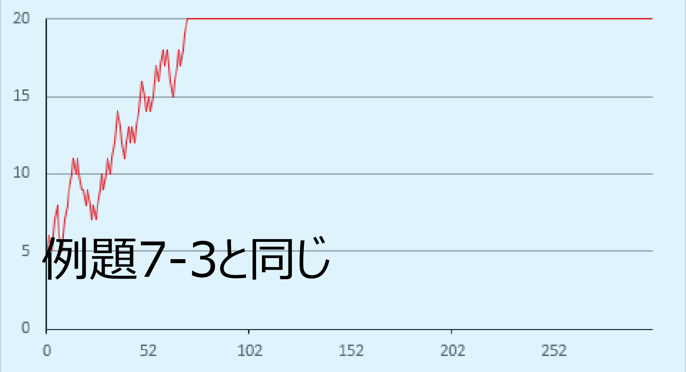
【例題7-4】信頼区間の計算 破産の確率

- セルO5に，反復回数分のシミュレーション結果の平均値を計算する式=AVERAGE(L6:L105)を入力（反復回数が100の場合）．今回の例では，シミュレーション結果の値が0または1であるため，平均値は「結果が1である割合」を表す．
- セルO6に，シミュレーション結果の標準偏差を計算する式=STDEV.S(L6:L105)を入力
- セルO8，O9に95%信頼区間の下限と上限の計算式=O5-2*O6/SQRT(100)，=O5+2*6/SQRT(100)をそれぞれ入力する
- Altキーを押しながらF8（キーボードの設定によってはAltキーとFnキーを押しながらF8）を押し，「マクロ」ウィンドウを起動させて「Repeat」を自校する．（実行できない場合は，マクロが無効になっている可能性があるため，Excelファイルを一旦閉じて再度開き，「コンテンツの有効化」ボタンを押す．有効化できない場合は，セキュリティの設定を変更する．（詳細は割愛））

【例題7-4】信頼区間の計算 破産の確率

	A	B	D	K	L	N	O	R
1	確率p	0.6						
2	初期枚数a	5				LoopNum	100	
3								
4	シミュレーション		結果			破産の確率		
5	回数	チップ枚数	0	反復結果	結果(1/0)	平均	0.18	=AVERAGE(L6:L105)
6	0	5	1:自分が破産	1	1	標準偏差	0.386123	=STDEV.S(L6:L105)
7	1	6	0:相手が破産または賭け継続中	2	0	95%信頼区間 下限値	0.102775	=O5-2*O6/SQRT(O2)
8	2	5		3	0	95%信頼区間 上限値	0.257225	=O5+2*O6/SQRT(O2)
9	3	6		4	0			
10	4	7		5	0			
11	5	8		6	0			
13	7	6		8	0			
14	8	5		9	1			
15	9	6		10	0			
16	10	7		11	0			
17	11	8		12	0			
18	12	9		13	0			
19	13	10		14	0			
20	14	11		15	0			
21	15	10		16	0			
22	16	11		17	0			
23	17	10		18	1			
24	18	9		19	0			
26	20	9		21	0			
27	21	8		22	0			
28	22	9		23	1			
29	23	8		24	0			
30	24	7		25	0			
31	25	8		26	0			

計算



例題7-3と同じ

```
Sub Repeat()
    Dim i As Integer
    Dim currentRow As Integer
    Dim ws As Worksheet

    ' ワークシートを指定
    Set ws = ActiveSheet

    '定義
    LoopNum = Cells(2, 15)              ' Loop回数（デフォルト100）
    SolveTime = 0.1                ' 計算時間（デフォルト0.1秒）
    StartRow = 6                   '開始行数（デフォルト6）
    StartColmn = 12                '開始列数（デフォルト12(=L列)）

    ' ループを100回繰り返す
    For i = 1 To LoopNum
        ' 現在の行を計算
        currentRow = i + StartRow - 1      ' L6から始めるので6を加える

        ' セルD5の値を現在の行に記録
        ws.Cells(currentRow, StartColmn).Value = ws.Cells(5, 4).Value

        ' 一秒待機（適宜調整可能）
        Application.Wait (Now + TimeValue("0:00:01") * SolveTime)
    Next i
End Sub
```

【例題7-4】信頼区間の計算 破産の確率

- この図の例では，$p = 0.6, a = 5$ のとき，300回目の賭けが終了した時点で自分が破産している確率の95%信頼区間として $(0.102775, 0.257225)$ が得られている
- 真の値（理論値）は決定論的シミュレーションで計算済みであり，その値は約0.13である
- 上の信頼区間はこれを含んでおり，正しく推定できると言える
- ただし，信頼区間の推定を何度も繰り返した場合，平均的には100回に5回の割合で誤った結果が得られる（95%信頼区間のため）

- $p_n(0)$ と$p_n(20)$ の値は，n を大きくしていくにつれて増加していくが，$n = 300$ の時点でほぼ収束している（勝負がついている）
- $p_{300}(0) = 0.131$ より，自分が破産する確率は13%程度であるといえる
- このように，ある時点での様子（「状態」と呼ぶ）が，その直前の状態によって定まるようなモデルをマルコフ過程という
- とくに，とり得る状態が離散的である場合，マルコフ連鎖という

【演習7-4】信頼区間の計算 破産の確率

- p と a の値を例題7-4とは別の任意の値に設定して同様の計算を行い，自分が破産する確率の95%信頼区間を計算しなさい（シミュレーションの反復回数は100とする）．また，決定的シミュレーションで理論値を計算し，推定した95%信頼区間がこれを含むかどうか確認しなさい．

【演習7-4】信頼区間の計算 破産の確率

配布用

【演習7-4】信頼区間の計算 破産の確率

配布用

【演習7-5】信頼区間の計算 破産の確率

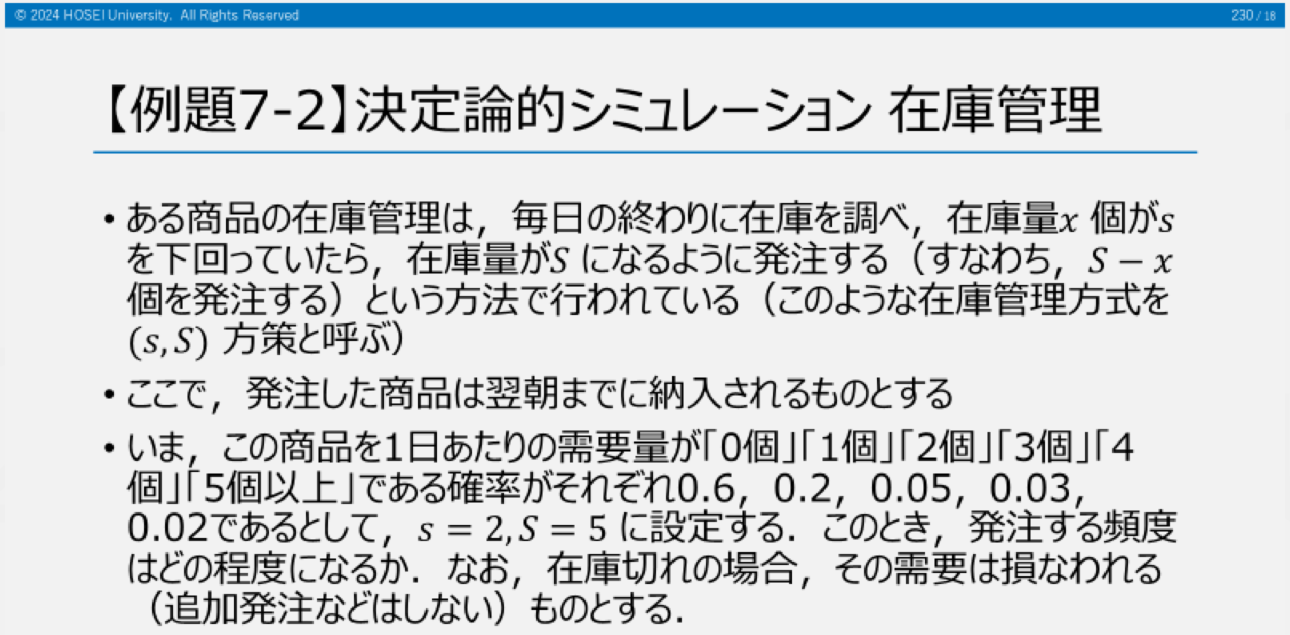
- 信頼区間の幅（上限と下限の差）を小さくする，つまり，推定の精度を高めるためには，シミュレーションの反復回数を増やせばよい．反復回数を4倍の400回にして95%信頼区間を計算し，信頼区間の幅が演習7-4と比べてどの程度小さくなるか調べなさい．

【演習7-5】信頼区間の計算 破産の確率

配布用

【演習7-6】信頼区間の計算 在庫管理

- 例題7-2について，モンテカルロ法を用いて解くことを考える
- 1日目～100日目の間に発注する割合の平均を，95%信頼区間で推定するシミュレーションを行うExcelシートを作成しなさい


 230 / 18

【例題7-2】決定論的シミュレーション 在庫管理

- ある商品の在庫管理は，毎日の終わりに在庫を調べ，在庫量x 個がsを下回っていたら，在庫量がS になるように発注する（すなわち，$S-x$個を発注する）という方法で行われている（このような在庫管理方式を(s,S) 方策と呼ぶ）
- ここで，発注した商品は翌朝までに納入されるものとする
- いま，この商品を1日あたりの需要量が「0個」「1個」「2個」「3個」「4個」「5個以上」である確率がそれぞれ0.6，0.2，0.05，0.03，0.02であるとして，$s=2, S=5$ に設定する．このとき，発注する頻度はどの程度になるか．なお，在庫切れの場合，その需要は損なわれる（追加発注などはしない）ものとする．

【演習7-6】信頼区間の計算 在庫管理

配布用

【演習7-6】信頼区間の計算 在庫管理

配布用