

目次

- 第1回 ガイダンス, オペレーションズリサーチとは
- 第2回 最適化問題
- 第3回 連続最適化
- 第4回 組合せ最適化
- 第5回 ネットワーク最適化1
- 第6回 ネットワーク最適化2
- 第7回 シミュレーション1
- 第8回 シミュレーション2
- 第9回 待ち行列理論1
- 第10回 待ち行列理論2
- 第11回 不確実性下での意思決定 (意思決定原理)
- 第12回 不確実性下での意思決定 (ディシジョンツリー・効用)
- 第13回 ゲーム理論
- 第14回 物流2024年問題

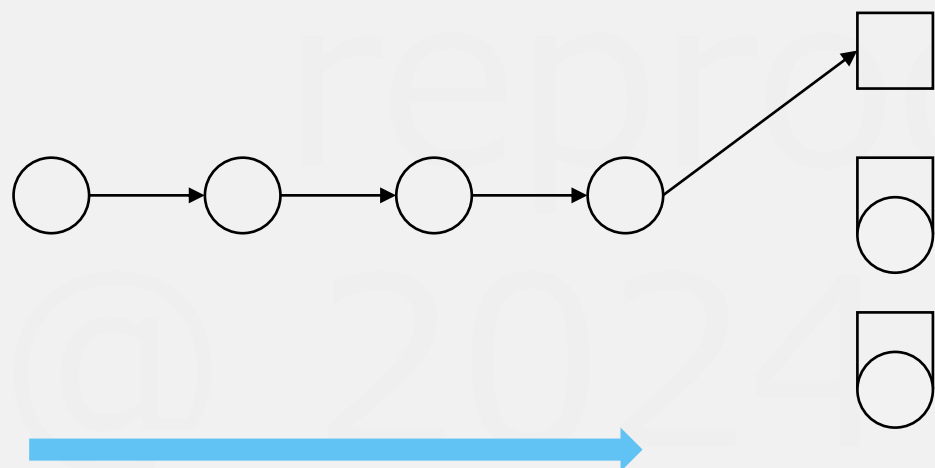
待ち行列

- 現代社会に見られる「混雑」や「待ち」といった現象の中には、それらを数理的に解析することによって適切な対応策が得られるものが少なくない
- 待ち行列理論は、電車、バス、エレベーター、病院、高速道路の料金所、スーパーのレジ、販売機、銀行のATM、情報通信、生産システム、駐車場、レストランなど、様々な混雑状況を分析することのできる理論である

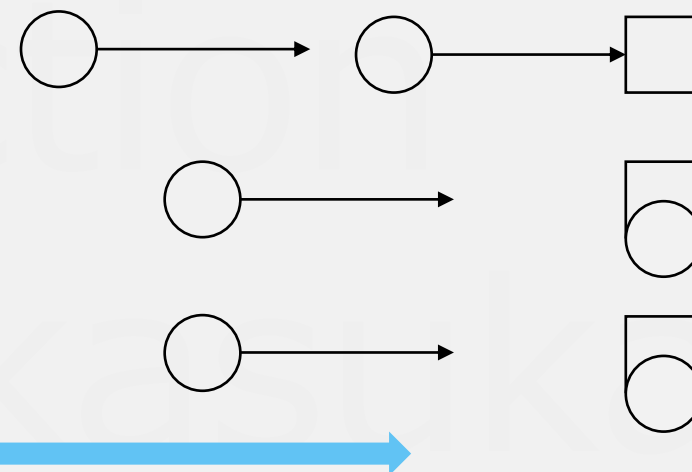


待ち行列

- 待ち行列を使ったときと使わないとき、待ち時間はいずれのほうが短くなるか
- 待ち行列モデルを学習し、待ち時間がいずれのほうが短い、つまり、平均待ち時間が短くなる仕組みについて理解する



待ち行列を使ったとき



待ち行列を使わないとき

待ち行列モデル

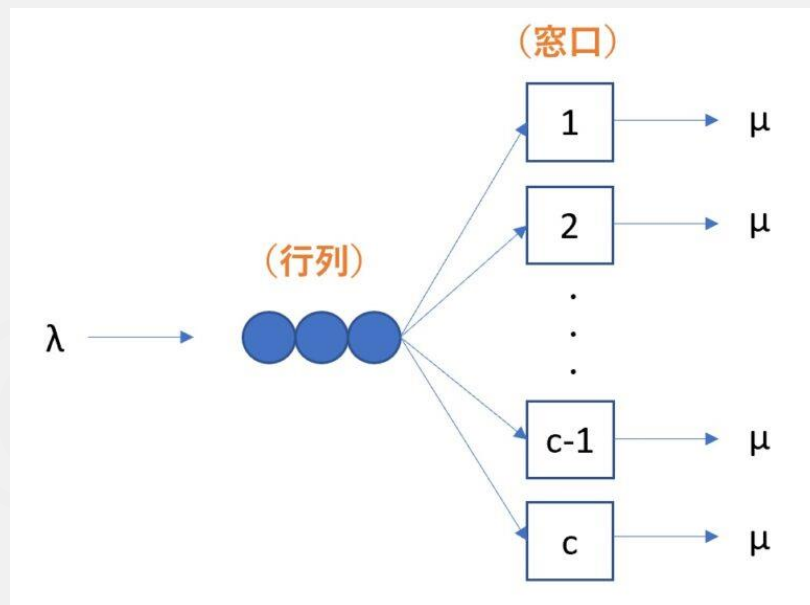
- 様々な混雑現象を統一的に扱うため、次のような待ち行列モデルを考える
 - 客はサービス（処理）を受けるために待ち行列システム（施設）にやってくる（客の到着）
 - 客は、システムに到着したときに窓口が空いていれば直ちにサービスを受けることができる。窓口がすべて塞がっていれば、待ち行列を作り、サービスが受けられるまで待つ。
 - 客は、サービスを受けている間、1つの窓口を占有し、サービスが終われば待ち行列システムから退去する
- 待ち行列の主な発生原因は
 - ラッシュアワー的：ある時間帯に窓口の処理能力を超える数の客が到着する場合、一時的に長い行列ができる
 - 確率的なゆらぎ：客の平均的な流れに比べて窓口の処理能力があるとしても、到着の仕方やサービス時間のゆらぎのために待ち行列が生じることがある

到着率とサービス率

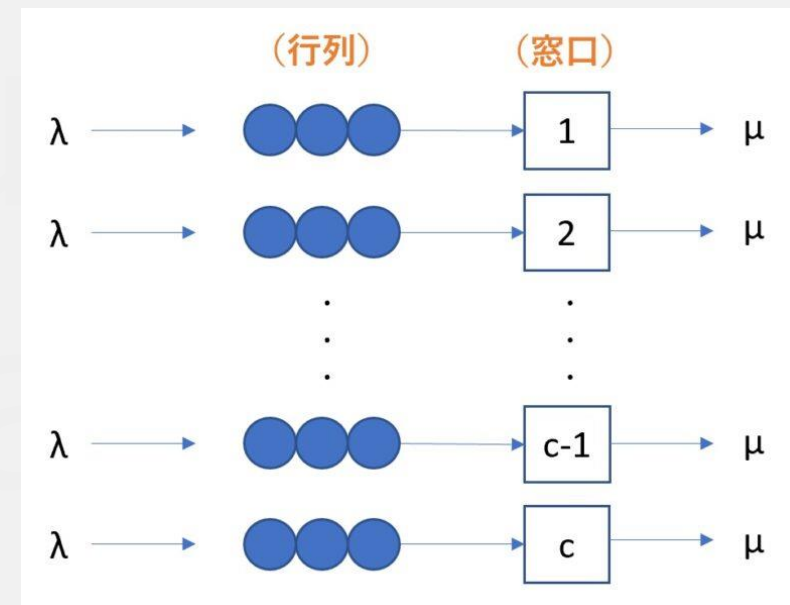
- 単位時間あたりの平均客数を**到着率 λ** と呼び、1つの窓口が単位時間あたりに処理できる平均客数（処理速度）を**サービス率 μ** と呼ぶ
- $1/\lambda$ は平均到着間隔（演習7-2で出てきた平均発注間隔に該当）を、 $1/\mu$ は平均サービス時間をそれぞれ表す
- 到着率がサービス率より大きい（ $\lambda > \mu$ 、客の到着時間が平均サービス時間より短い）とすると、サービス能力が客の到着頻度に劣るため、行列は次第に長くなり発散してしまう
- 逆に、到着率がサービス率未満（ $\lambda < \mu$ ）であれば、行列が無限に長くなることはない。ただし、客の到着間隔やサービス時間にばらつきがある場合は、待ちが発生する可能性がある。
- 到着率とサービス率は一定（時間とともに変化しない）とし、 $\lambda < \mu$ が成り立つものとして、客が「ランダム」に到着する場合を対象に待ち行列の長さや待ち時間の考察を行う

到着率とサービス率

- 待ち行列を使ったときと使わないとき，待ち時間はいずれのほうが短くなるか
- 待ち行列モデルを学習し，待ち時間がいずれのほうが短い，つまり，平均待ち時間が短くなる仕組みについて理解する



待ち行列を使ったとき



待ち行列を使わないとき

【例題9-1】単一窓口待ち行列

- 窓口が1つしかない待ち行列システムを考える
- 客は、平均到着間隔5分でランダムに到着し、到着した順にサービスを受けるものとする
- サービス時間は1人あたり4分（ばらつきなし）であるとする
- このとき、客の平均待ち時間、および待たされない客の割合はどの程度か

【例題9-1】単一窓口待ち行列

- 平均待ち時間:
 - サービス時間: 4分
 - 平均到着間隔: 5分
 - サービス率 $= 1 / (\text{平均サービス時間}) = 1/4 = 0.25$
 - 到着率 $= 1 / (\text{平均到着間隔}) = 1/5 = 0.2$
 - サービス率 > 到着率 のため, 系は安定している
 - 平均待ち時間 $= (1/\text{到着率} - 1/\text{サービス率}) \times \text{サービス時間}$
 $= (1/0.2 - 1/0.25) \times 4$
 $= 4\text{分}$
- 待たされない客の割合:
 - 利用率 $= \text{到着率} / \text{サービス率} = 0.2 / 0.25 = 0.8$
 - 待たされない客の割合 $= 1 - \text{利用率} = 1 - 0.8 = 0.2$
 - つまり, 20%の客は待たされない

ランダム到着

- ここでは、客が以下の性質を満たすとき、「ランダム到着」と考える
 - 定常性：客が到着する確率はどの時間帯でも同じである
 - 独立性：過去の客の到着の仕方が、現在の到着の仕方に影響を与えない
 - 希少性：2人以上の客が同時に到着する確率は無視できるほど小さい
- 到着率を λ （平均到着時間を）、客の到着間隔（ある脚が到着した後、次の客が到着するまでの時間） T を確率変数と考え、 T が t 未満である確率 $P(T < t)$ が

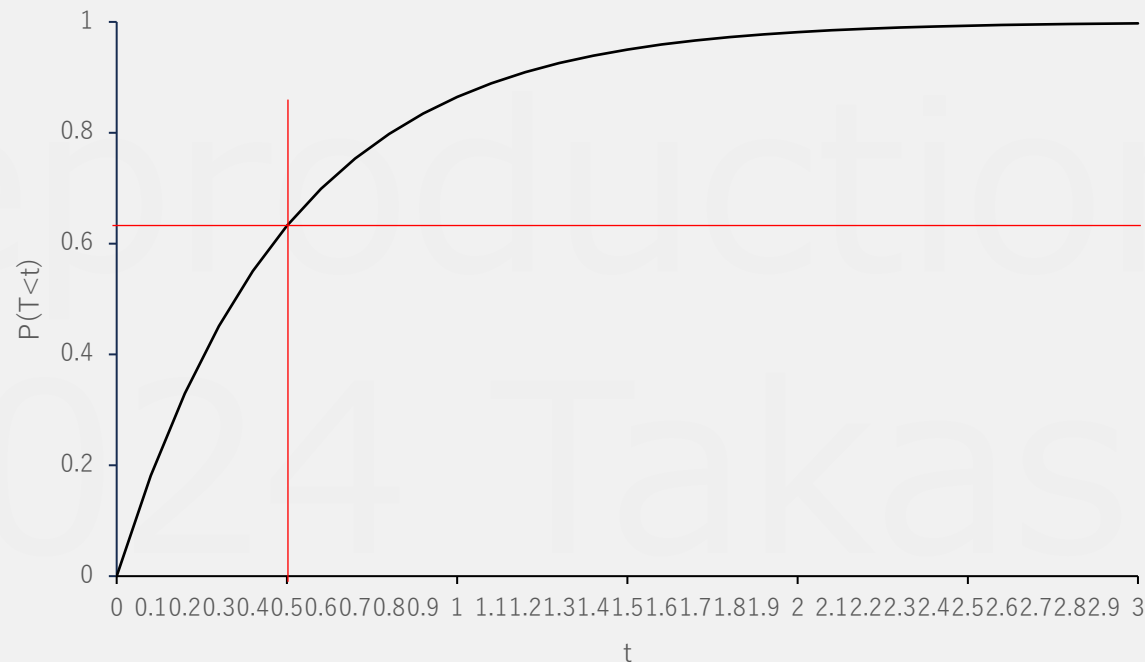
$$P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

で与えられるとき、客の到着は上の3つの性質を満たし、到着間隔 T の平均（期待値）は $1/\lambda$ になることが知られている

- 一般に、確率変数 T の確率分布が上の式で与えられるとき、 T は平均 $1/\lambda$ の**指数分布**に従うといい、到着間隔が互いに独立で指数分布に従う到着過程は**ポアソン到着**と呼ばれる

ランダム到着

- 以下のグラフは、 $\lambda = 2$ のときの $P(T < t)$ のグラフである
- この場合、たとえば、到着間隔が0.5未満となる確率は約63.2%である



ランダム到着

- ある客が到着してから次の客が到着することなく t' 時間経過したとして、これから t 時間経過するまでに次の客が到着する確率を考える
- この確率は、到着間隔 T が $T \geq t'$ のときに、 $T < t' + t$ となる条件付き確率 $P(T < t' + t | T \geq t')$ であり、
 - $$P(T < t' + t | T \geq t') = \frac{P(t' \leq T < t' + t)}{P(T \geq t')} = \frac{P(T < t' + t) - P(T < t')}{1 - P(T < t')} =$$
$$\frac{(1 - e^{-\lambda(t' + t)}) - (1 - e^{-\lambda t'})}{1 - (1 - e^{-\lambda t'})} = \frac{-e^{-\lambda t'} * e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t'}}{e^{-\lambda t'}} = 1 - e^{-\lambda t} = P(T < t)$$
- つまり、次の客がいつ到着するかは、前の客が到着してからどのくらい時間が経過しているかとは無関係であるといえる

指数分布に従う乱数の生成

- 指数分布に従う乱数を生成するためには、まず一様乱数で0以上1未満の値 x を生成し、 $P(T < t) = x$ となる t を出力すればよい
 - そのためには、関数 $F(t) = P(T < t)$ として、その逆関数
 - $F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - x)$
- に、一様乱数で生成した値を代表すればよい
- Excelで自然対数の計算を行うにはLN関数を用いる

【例題9-2】単一窓口待ち行列

- 例題9-1について，待ち行列システムのシミュレーションを行うことで，客の平均待ち時間および待たされない客の割合の95%信頼区間を推定しなさい

【例題9-1】単一窓口待ち行列

- 窓口が1つしかない待ち行列システムを考える
- 客は，平均到着間隔5分でランダムに到着し，到着した順にサービスを受けるものとする
- サービス時間は1人あたり4分（ばらつきなし）であるとする
- このとき，客の平均待ち時間，および待たされない客の割合はどの程度か

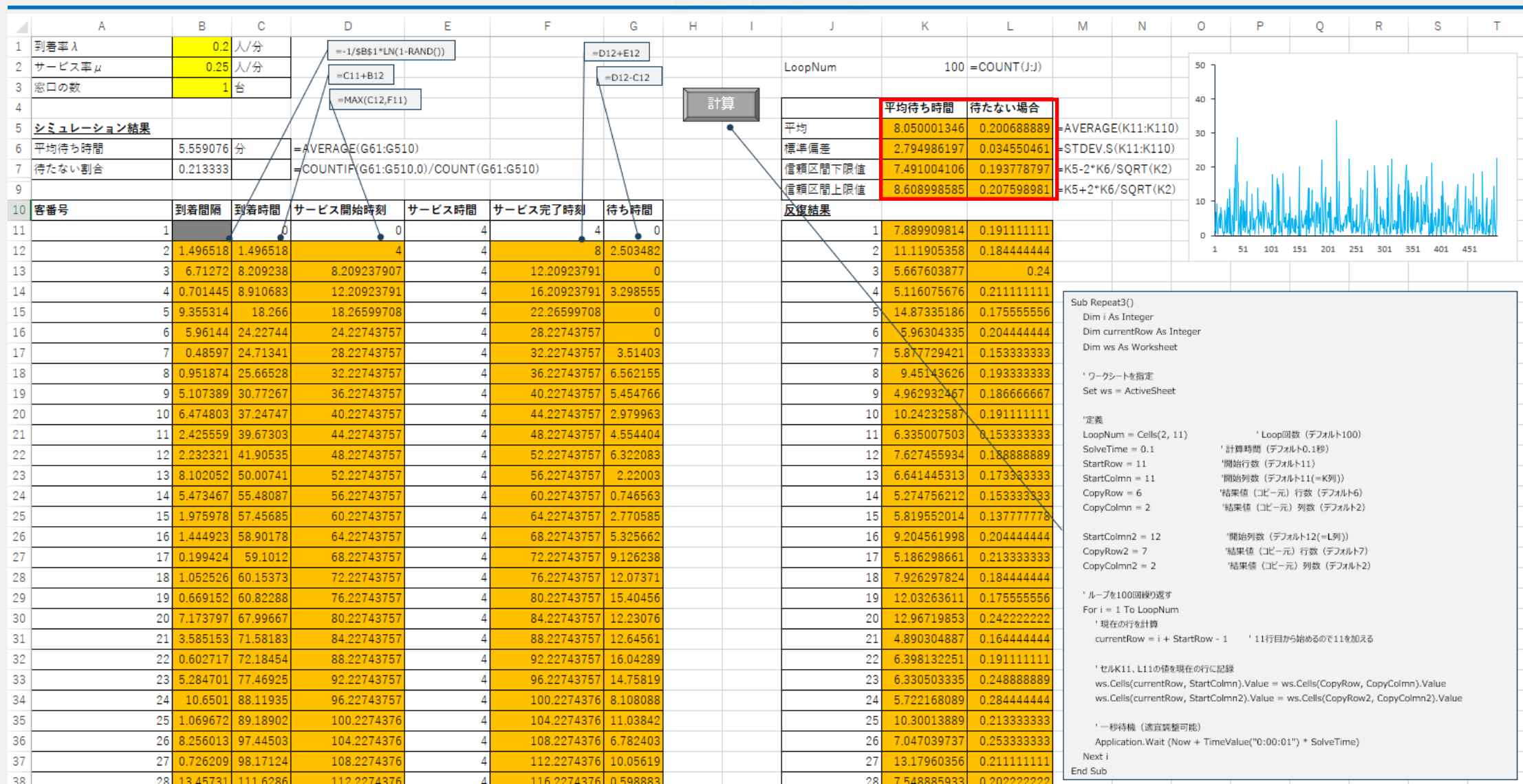
【例題9-2】単一窓口待ち行列

- 各客の「（前の客との）到着間隔」「到着時刻」「サービス開始時刻」「サービス時間」「サービス完了時刻」「待ち時間」を到着順に計算していくことで、待ち行列のシミュレーションを行う
- セルB1, B2に、到着率 $\lambda = 0.2$ とサービス率 $\mu = 0.25$, 窓口の数1の値を入力.
- 到着間隔は2番め以降の客について、平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う乱数を生成する. セルB12に計算式 $=-1/\$B\$1*LN(1-RAND())$ を入力.
- 到着時刻は最初の客の到着時刻を0として、2番目以降の客の到着時刻は「前の客の到着時刻」+「到着間隔」で与えられる. セルC11に0を、セルC12に計算式 $=C11+B12$ を入力.
- サービス開始時刻は「到着時刻」と「前の客の退去時刻」の遅いほうの値で与えられる. ただし、最初の客は到着と同時にサービスが開始されるため、サービス開始時刻は0である. セルD11に0を、セルD12に計算式 $=MAX(C12,F11)$ を入力.

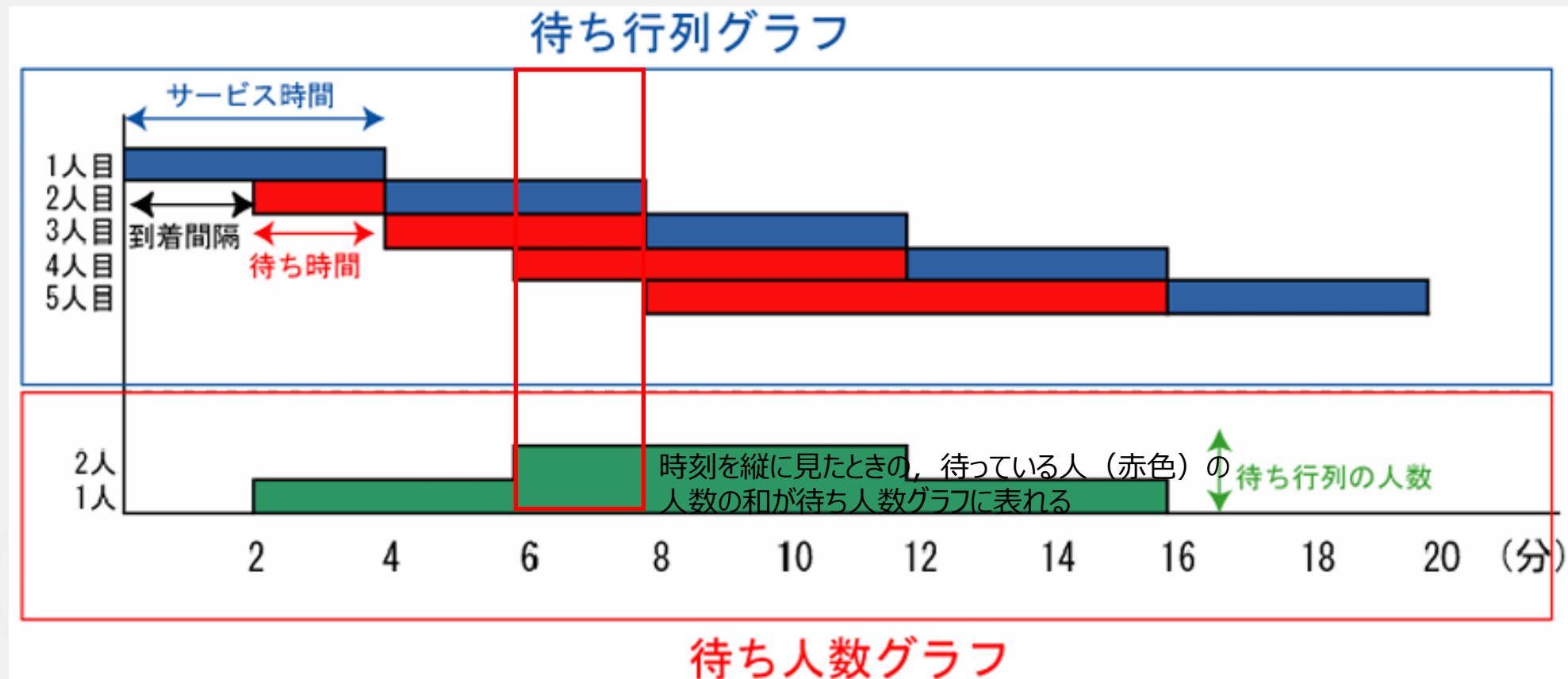
【例題9-2】単一窓口待ち行列

- サービス時間は $1/\mu = 4$ 分で一定である. セルE11に計算式=1/\$B\$2を入力
- サービス完了時刻は「サービス開始時刻」+「サービス時間」で与えられる. セルF11に計算式=D11+E11を入力
- 待ち時間は「サービス開始時刻」-「到着時刻」で与えられる. セルG11に計算式=D11-C11を入力
- サービス開始時刻, サービス時間, サービス完了時刻, 待ち時間を下方方向にコピーする
- シミュレーションの結果として, 平均待ち時間と待ち時間が0である客の割合を計算する. このとき, 最初の客が到着してしばらくの間はシステムが定常状態になっていない(客がまだ少ない)ため, 初期のデータ(例えば最初の50人分)は平均待ち時間などの計算に用いないほうがよい. ここでは, 51番目以降の客のデータを計算に用いることとし, セルB6に計算式=AVERAGE(G61:G510)を, セルB7に計算式=COUNTIF(G61:G510,0)/COUNT(G61:G510)を入力.
- VBAマクロ「Repeat」でシミュレーションを反復し, 95%信頼区間を計算する

【例題9-2】単一窓口待ち行列



待ち行列グラフ



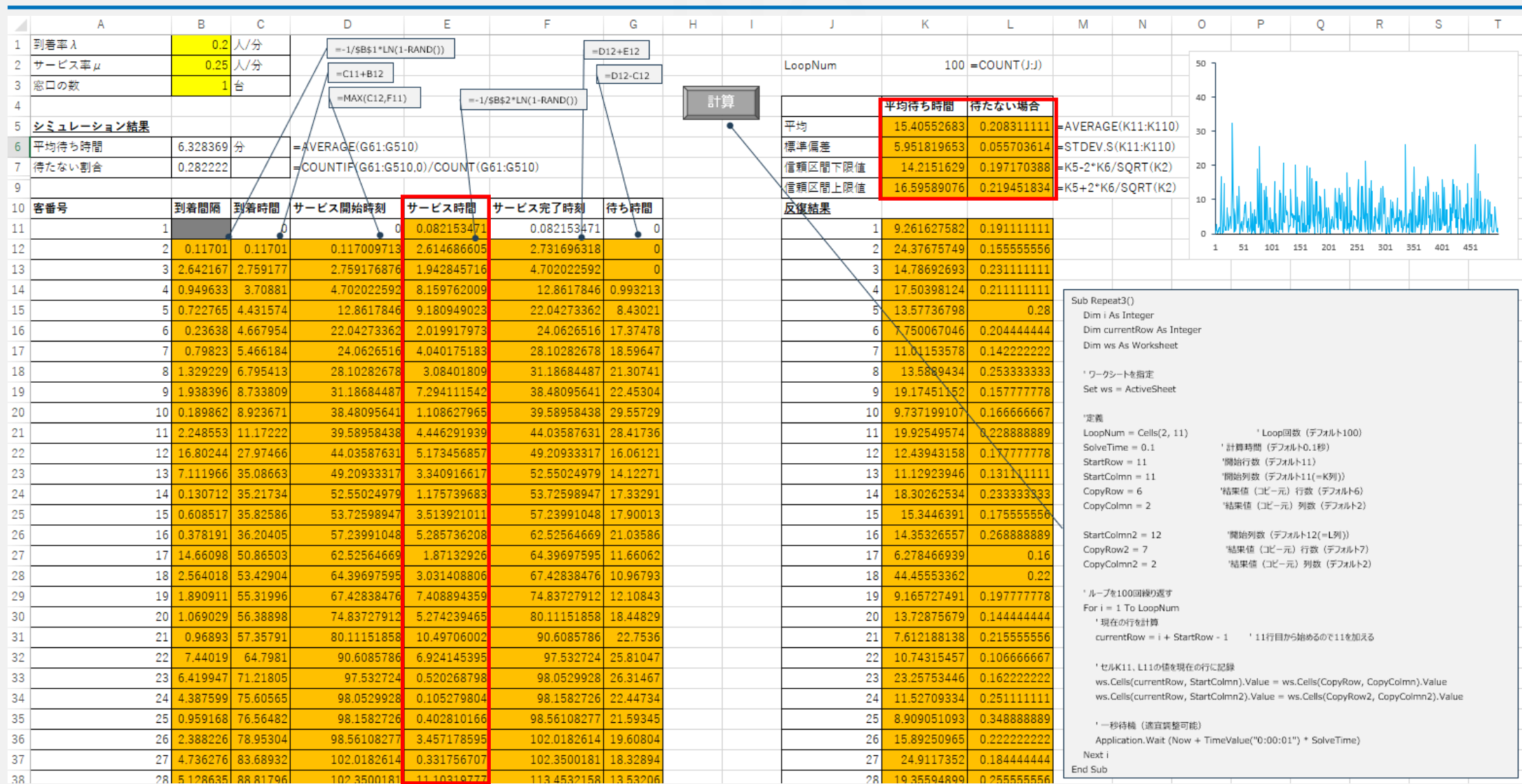
【例題9-3】単一窓口待ち行列

- 例題9-1について，サービス時間が一定ではない以下の2つの場合において，客の待ち時間と待たされない客の割合を推定し，サービス時間が一定の場合と比較しなさい
 - サービス時間が平均4分の指数分布に従う場合

【例題9-1】単一窓口待ち行列

- 窓口が1つしかない待ち行列システムを考える
- 客は，平均到着間隔5分でランダムに到着し，到着した順にサービスを受けるものとする
- サービス時間は1人あたり4分（ばらつきなし）であるとする
- このとき，客の平均待ち時間，および待たされない客の割合はどの程度か

【例題9-3】単一窓口待ち行列



【例題9-4】単一窓口待ち行列

- 例題9-1について，サービス時間が一定ではない以下の2つの場合において，客の待ち時間と待たされない客の割合を推定し，サービス時間が一定の場合と比較しなさい
 - サービス時間の確率分布が以下の表で与えられる場合

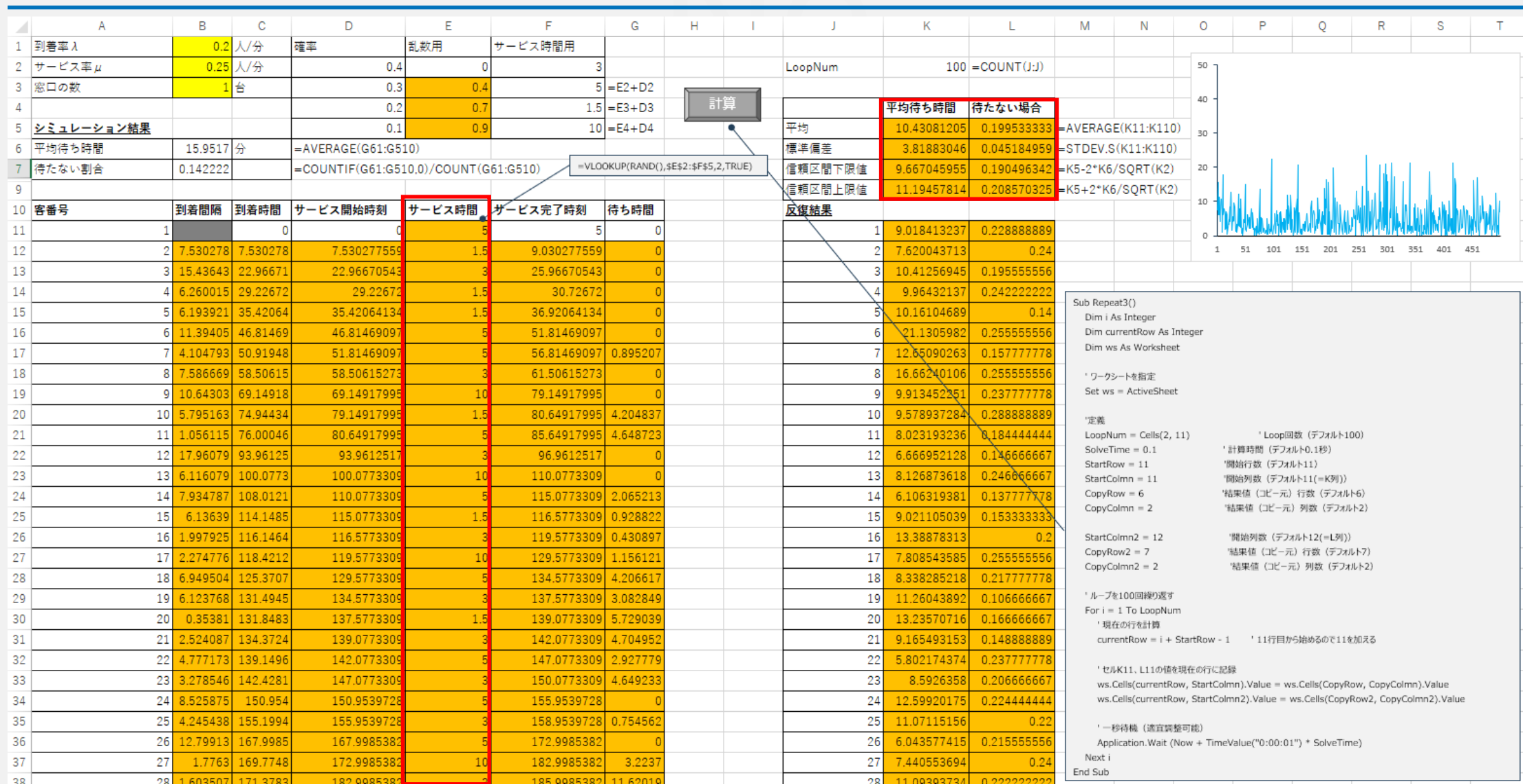
サービス時間	3分	5分	1.5分	10分
確率	40%	30%	20%	10%

この場合，サービス時間の平均は， $3 \times 0.4 + 5 \times 0.3 + 1.5 \times 0.2 + 10 \times 0.1 = 4$ より，例題9-1及び例題9-3の場合と同じ4分である

【例題9-1】単一窓口待ち行列

- 窓口が1つしかない待ち行列システムを考える
- 客は，平均到着間隔5分でランダムに到着し，到着した順にサービスを受けるものとする
- サービス時間は1人あたり4分（ばらつきなし）であるとする
- このとき，客の平均待ち時間，および待たされない客の割合はどの程度か

【例題9-4】単一窓口待ち行列



【演習9-1】【演習9-2】【演習9-3】複数窓口待ち行列

- 例題9-1や例題9-3, 例題9-4において, 窓口が複数あるとして, Excelを用いたシミュレーションを行いなさい. ただし, この場合も客は1列に並び, 到着順にサービスを受けるものとする.

【例題9-1】単一窓口待ち行列

- 窓口が1つしかない待ち行列システムを考える
- 客は, 平均到着間隔5分でランダムに到着し, 到着した順にサービスを受けるものとする
- サービス時間は1人あたり4分 (ばらつきなし) であるとする
- このとき, 客の平均待ち時間, および待たされない客の割合はどの程度か

【演習9-1】【演習9-2】【演習9-3】複数窓口待ち行列

- 窓口の数（セルB3の値）を c とする。単一窓口の場合と異なるのは、「サービス開始時刻」の計算方法のみである
 - i 番目 ($i \leq c$) の客については、到着後、直ちにサービスが開始されるので、到着時刻がサービス開始時刻である
 - i 番目 ($i > c$) の客については、客がサービスを受けられるのは、
 - a. 自分自身の到着時刻
 - b. $1 \sim (i - 1)$ 番目までの客のサービス完了時刻のうち、 c 番目に遅い時刻のいずれか、どちらか遅い方である
 - a は、到着時にどれか1つでも窓口が空いている場合に対応し、この場合、客は待つことなく直ちにサービスが開始される
 - b は、到着時に c 個すべての窓口が塞がっている場合に対応し、 c 個のうち、どれか1つの窓口が空いた時点、すなわち、自分より前に到着した客のうち、サービス完了時刻が c 番目に遅い客が退去した時刻にサービスが開始される（このとき、 $c - 1$ 人がまだサービスを受けている）
 - Excelで、複数の値の中から k 番目に大きい値を計算するには、LARGE関数を用いればよい。例えば、計算式=LARGE(F11:F20,3)は、セルF11からF20の10個の値の中で、3番めに大きい値を返す

【演習9-1】複数窓口待ち行列（例題9-1）

配布用

【演習9-2】複数窓口待ち行列（例題9-3）

配布用

【演習9-3】複数窓口待ち行列（例題9-4）

配布用

結果とのまとめ

配布用

M/M/1型待ち行列システム

- 窓口が1つで，待合室の大きさに制限がないシステムについて考える
- 客の到達，サービス時間はともにランダムである（すなわち，到着間隔，サービス時間は指数分布に従う）ものとし，到着率 λ ，サービス率 μ について， $\lambda < \mu$ が成り立つとする
- 客のサービスは先着順に行われるものとする
- このような待ち行列システムをM/M/1という記号で表す（1つ目の「M」と2つ目の「M」は，到着間隔とサービス時間がそれぞれ指数分布に従うことを，3つ目の「1」は窓口の数を示している）

M/M/1型待ち行列システム

- 初めの客が到着してから時間が十分経過したとき、システム内滞在客数（サービスを受けている人の数と待っている人の数の和）が n 人である確率を p_n とする
- M/M/1では、 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ として、
$$p_n = (1 - \rho)\rho^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

であることが知られており、これより以下のことが成立する

- 滞在客数が0である確率は $p_0 = 1 - \rho$ であり、これは、到着した客が待たされない確率と考えてよい。逆に、滞在客数が1以上である確率は $1 - p_0 = \rho$ であり、これは窓口がサービスを行っている（窓口が塞がっている）時間の割合を表すことから、 ρ は**利用率**と呼ばれる。利用率が $\rho < 1$ であることが、行列が発散しないための条件である。
- 平均滞在客数 L は

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n (1 - \rho) \rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

である。また、平均滞在時間 W は、後述するように $L = \lambda W$ （リトルの公式と呼ばれる）が成立することから、

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

である。

- 平均待ち人数 L_q は、

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1) p_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

である。平均待ち時間 W_q は、

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

である。

- 平均滞在客数と平均待ち時間人数の間、及び平均滞在時間と平均待ち時間の間には、それぞれ、

$$\text{平均滞在客数 } L = \text{平均待ち人数 } L_q + \text{利用率 } \rho$$

$$\text{平均滞在時間 } W = \text{平均待ち時間 } W_q + \text{平均サービス時間 } \frac{1}{\mu}$$

が成り立つ

【例題9-5】M/M/1型待ち行列システム

- ある施設の入場券販売窓口では、1時間あたり30名の割合で客が来るのに対し、窓口で処理できる客の平均的な人数は1時間あたり40名である
- 客の到着間隔も、レジでのサービス時間も指数分布に従うものとする
- このとき、「窓口が空いている確率」、「窓口が空くのを待っている客の平均人数」、「平均滞在客数」、「到着してから、入場の購入を終えて退去するまでの平均時間」、「平均待ち時間」を求めよ

【例題9-5】M/M/1型待ち行列システム

- 到着率 λ は1時間あたり30名, サービス率 μ は1時間あたり40名, 利用率 ρ は0.75から

- 窓口が空いている確率 p_0 は,

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{30}{40} = 0.25$$

- 窓口が空くのを待っている客の平均人数 L_q は,

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{30^2}{1-30} = 2.25 \text{ 人}$$

- 平均滞在客数 L は,

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = L_q + \rho = 2.25 + 0.75 = 3 \text{ 人}$$

- 到着してから, 入場の購入を終えて退去するまでの平均時間 W は,

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{40-30} = 0.1 \text{ 時間, つまり6分}$$

- 平均待ち時間 W_q は,

$$W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.25}{30} = 0.075 \text{ 時間, つまり4.5分}$$

【例題9-5】M/M/1型待ち行列システム

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	λ	到着率	30	名/時間				
3	μ	サービス率	40	名/時間				
4	ρ	利用率	0.75				=C2/C3	
5	Lq	平均待ち人数	2.25	人			=(C4^2)/(1-C4)	
6	Wq	平均待ち時間	0.075	時間	4.5 分		=C5/C2	
7	L	平均滞在客数	3	人			=C5+C4	
8	W	平均滞在時間	0.1	時間	6 分		=C7/C2	

リトルの公式

- 一般に, 平均まち人数 L_q と平均待ち時間 W_q の間, 平均滞在客数 L と平均滞在時間 W の間には, それぞれ以下の関係が成り立つことが知られている (証明は割愛)

$$L_q = \lambda W_q, L = \lambda W$$

- これをリトルの公式という

【演習9-4】リトルの公式

- ある銀行のATMの利用状況を調べたところ、ある時間帯での平均滞在客数は4.5人、5分あたりの平均到着客数は20人であった
- リトルの公式を用いて、客の平均滞在時間を求めなさい

【演習9-4】リトルの公式

配布用

【演習9-4】リトルの公式

配布用

【演習9-5】M/M/1

- 客の到着間隔，サービス時間がともに指数分布に従う単一窓口待ち行列システムについて考える
- 客の平均到着間隔は8分とする
- 平均サービス時間が6分のとき，以下を答えなさい
 - 利用率
 - 待たずにサービスを受けられる客の割合
 - サービスを待っている客がいる（滞在人数が2人以上である）確率
 - 客の平均待ち時間（分）
 - 平均滞在客数（人）

【演習9-5】M/M/1

配布用

【演習9-5】M/M/1

配布用

【演習9-5】M/M/1

配布用

【演習9-6】M/M/1

- 客の到着間隔，サービス時間がともに指数分布に従う単一窓口待ち行列システムについて考える
- 客の平均到着間隔は8分とする
- 例題9-10（平均サービス時間が6分のとき）と比較して，客の平均待ち時間を $\frac{1}{10}$ 以下に抑えるためには，平均サービス時間を何分にすればよいか

【演習9-6】M/M/1

配布用

【演習9-6】M/M/1

配布用