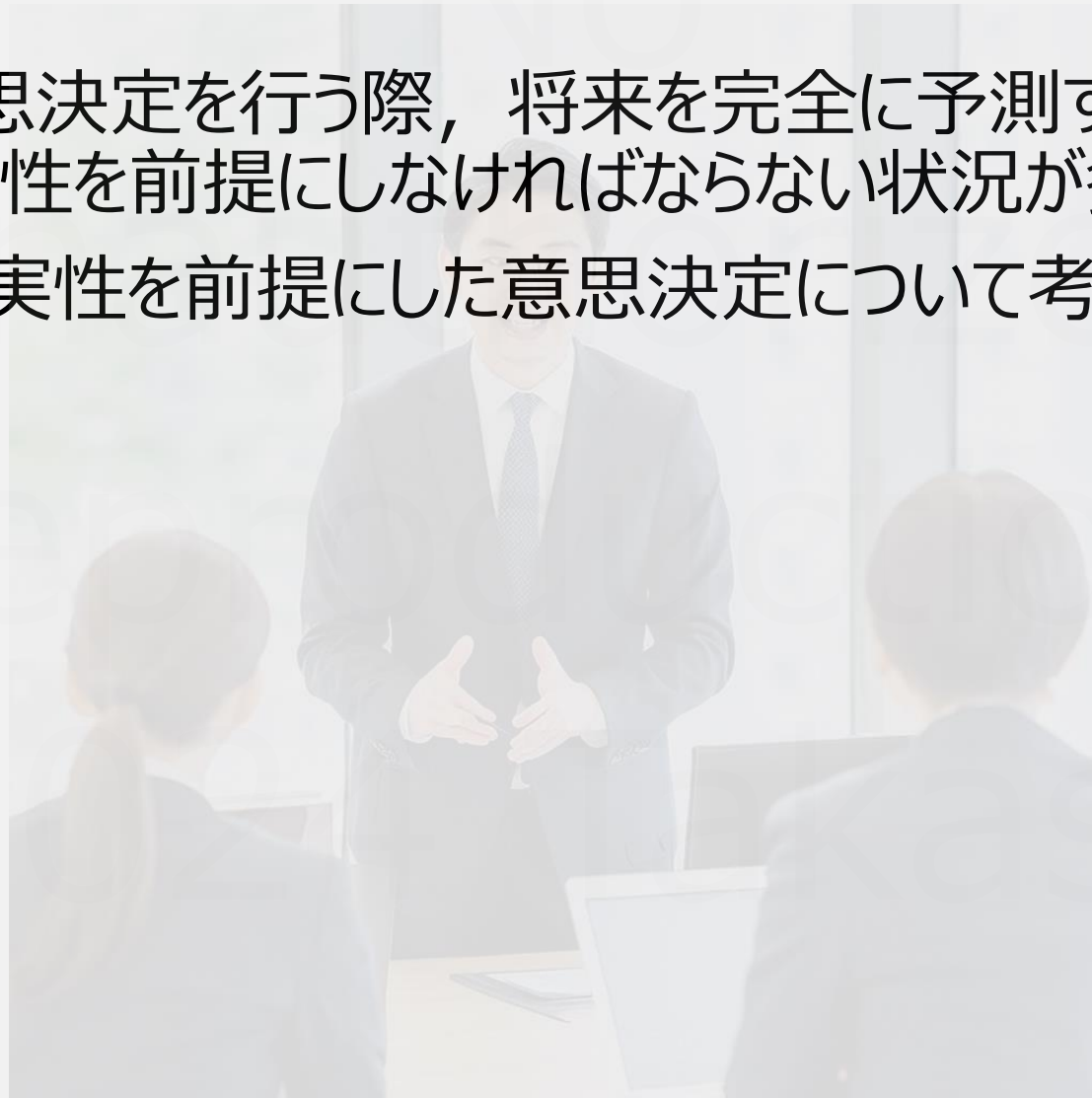


目次

- 第1回 ガイダンス, オペレーションズリサーチとは
- 第2回 最適化問題
- 第3回 連続最適化
- 第4回 組合せ最適化
- 第5回 ネットワーク最適化1
- 第6回 ネットワーク最適化2
- 第7回 シミュレーション1
- 第8回 シミュレーション2
- 第9回 待ち行列理論1
- 第10回 待ち行列理論2
- 第11回 不確実性下での意思決定 (意思決定原理)
- 第12回 不確実性下での意思決定 (ディシジョンツリー・効用)
- 第13回 ゲーム理論
- 第14回 物流2024年問題

不確実性下での意思決定

- 現実社会で意思決定を行う際、将来を完全に予測することはできず、何らかの不確実性を前提にしなければならない状況が多く存在する
- ここでは、不確実性を前提にした意思決定について考える



不確実性下での意思決定

- 意思決定者は、将来起こり得る状況を前もって確実に知ることができない（コントロールすることもできない）中で、複数の**代替案**の中から1つを選択する
- 代替案を選択するとき、選択の過程によって選択の結果は異なってくるが、その過程を考える際に用いる原理を紹介する。例えば、マクシミン原理、マクシマックス原理、ミニマックス後悔原理、ラプラスの原理、期待値原理、期待値・分散原理、最尤未来原理、要求水準原理等がある。
- 将来起こる得る状況のそれぞれを**自然の状態**と呼ぶ。どの状態が起こるかを事前にすることができない。ただし、自然の状態と代替案が決まれば、その結果もたされる**利得**（意思決定者にとっての勝ちを示す定量的な指標、ペイオフともいう）は事前にわかるものとする。
- 利得を表にまとめたものを**利得表**と呼ぶ
- データは不確実なものとして捉え、その範囲を指定し、その中で最悪の状況を想定して行う最適化を**ロバスト最適化**という

マクシミン原理/マクシマックス原理/ミニマックス後悔原理

- 最小の利得を最大化することを考える（マクシミン原理）
 - 代替案に対して最悪の状態を想定し，最悪の状況における利得が最も大きいものを選択する．慎重，保守的，消極的，悲観的な態度を反映しているといえる（例：火災保険）
- 最大の利得を最大化することを考える（マクシマックス原理）
 - 積極的，楽観的な態度を反映している（例：宝くじ）．追い詰められ，一発勝負に出るときの基準と捉えることもできる．
- 意思決定の後，自然の状態が決定したときに感じる「後悔」の度合いを最小化することを考える（ミニマックス後悔原理）

ラプラスの原理

- 起こり得る自然の状態はすべて等確率で起こるとみなし，期待値を最大化する
- ある1つの状態が，他の状態と比べて起こる確率が大い，または小さいと考えられる十分な理由がない限り，すべての状態は同じ確率をもつと考える（理由不十分の原理）

【例題11-1】不確実性下での意思決定

- ある投資家が次のような不動産への投資決定の問題に直面している
- 投資対象物件は、オフィスビル、店舗用ビル、住居用ビルの3つであり、所要当時額はほとんど同額ではあるが、それぞれの物件の収益は今後の景気によって異なる
- 以下の表は、今後の景気の予想を3つのケース（上昇、横ばい、下降）に分け、それぞれの物件の収益性の見通し（万円/月）をまとめたものである
- マクシミン原理/マクシマックス原理/ミニマックス後悔原理/ラプラスの原理について、それぞれの原理に基づいた意思決定結果を述べよ

代替案	自然の状態		
	上昇	横ばい	下降
オフィスビル	100	50	-5
店舗用ビル	85	60	25
住居用ビル	70	65	50

【例題11-1】不確実性下での意思決定

- オフィスビルに投資した場合，利益が最小となるのは「下降」のときで，そのときの利得は-5である
- 店舗用ビル，住居用ビルの場合も「下降」のときに利得最小となり，そのときの利得はそれぞれ25, 50である
- したがって，マクシミン原理に従えば，住居用ビルが選ばれる

代替案	自然の状態		
	上昇	横ばい	下降
オフィスビル	100	50	-5
店舗用ビル	85	60	25
住居用ビル	70	65	50

STEP1 :
それぞれの代替案の中で最小の自然の状態を選択

STEP2 :
STEP1の選択の中で最大の代替案を選択

【例題11-2】不確実性下での意思決定

- いずれの場合も「上昇」のときに利得最大となる
- そのときの利得は，それぞれ100, 85, 70である
- したがって，マクシマックス原理に従えば，オフィスビルが選ばれる

代替案	自然の状態		
	上昇	横ばい	下降
オフィスビル	100	50	-5
店舗用ビル	85	60	25
住居用ビル	70	65	50

STEP1 :
それぞれの代替案の中で最大の自然の状態を選択

STEP2 :
STEP1の選択の中で最大の代替案を選択

【例題11-3】不確実性下での意思決定

- 自然の状態が「上昇」であるとすれば、このときの最善の選択は「オフィスビル」であるから、「オフィスビル」を選択していれば後悔はない
- しかし、「店舗用ビル」を選択していたとすると、最善の選択である「オフィスビル」に比べて得られる利得は少ないため、後悔（リグレット）を感じることになる。この後悔の度合いを利得の差 $100-85=15$ で評価する。同様に、「住居用ビル」を選択したときの後悔は30である。
- 「横ばい」「下降」の場合も同様に各代替案について後悔を計算すると、結果は以下のようにまとめられる
- この後悔表についてミニマックス原理を適用する（最大の後悔を最小にする代替案を選ぶ）と、オフィスビルを選択したときは、最悪の場合55の後悔、店舗用ビル、住居用ビルの場合は、それぞれ最悪で25、30の後悔となる
- したがって、ミニマックス後悔原理に従えば、店舗用ビルが選択される

代替案	自然の状態		
	上昇	横ばい	下降
オフィスビル	100	50	-5
店舗用ビル	85	60	25
住居用ビル	70	65	50

代替案	自然の状態		
	上昇	横ばい	下降
オフィスビル	0	15	55
店舗用ビル	15	5	25
住居用ビル	30	0	0

後悔表

【例題11-4】不確実性下での意思決定

- 3つの自然の状態はすべて同じ確率 $\frac{1}{3}$ をもつと考える
- その結果, オフィスビル, 店舗用ビル, 住居用ビルに投資したときの期待利得は, それぞれ, $\frac{145}{3}, \frac{170}{3}, \frac{185}{3}$ である
- よって, ラプラスの原理に従えば, 住居用ビルが選択される

代替案	自然の状態			期待利得
	上昇	横ばい	下降	
確率	1/3	1/3	1/3	
オフィスビル	100	50	-5	145/3
店舗用ビル	85	60	25	170/3
住居用ビル	70	65	50	185/3

【例題11-5】不確実性下での意思決定

- 4つの株式があり，どれか1つに投資したいと考えている
- これらの株式から得られる利益は経済状況に影響を受けるため，来年予想される経済状態として，「良くなる」「多少良くなる」「変わらない」「悪くなる」の4つの場合を想定し，それぞれの場合について利益を予想した
- マクシミン原理，ミニマックス後悔原理，ラプラス原理の決定原理を選択したとき，それぞれの代替案が選択されるか

	自然の状態			
	良くなる	多少良くなる	変わらない	悪くなる
A案	250	200	50	-200
B案	150	100	10	-10
C案	280	40	5	-30
D案	50	50	30	20

【例題11-5】不確実性下での意思決定

- A案に投資した場合，利益が最小となるのは「変わらない」のときで，そのときの利得は50である
- B案，C案，D案の場合も同様に，B案は「悪くなる」のときに利得は-10，C案は「悪くなる」のときに利得は-30，D案は「悪くなる」のときに利得は20となる
- したがって，マクシミン原理に従えば，A案が選ばれる

	自然の状態			
	良くなる	多少良くなる	変わらない	悪くなる
A案	250	200	50	-200
B案	150	100	10	-10
C案	280	40	5	-30
D案	50	50	30	20

【例題11-6】不確実性下での意思決定

- 自然の状態が「良くなる」とするとすれば、このときの最善の選択は「C案」であるから、「C案」を選択していれば後悔はない
- しかし、「A案」を選択していたとすると、最善の選択である「C案」に比べて得られる利得は少ないため、後悔（リグレット）を感じることになる。この後悔の度合いを利得の差 $280-250=30$ で評価する。同様に、「B案」を選択したときの後悔は130、「D案」を選択したときの後悔は230である。
- 「多少良くなる」「変わらない」「悪くなる」の場合も同様に各代替案について後悔を計算すると、結果は以下のよう
にまとめられる
- この後悔表についてミニマックス原理を適用する（最大の後悔を最小にする代替案を選ぶ）と、A案を選択したときは、最悪の場合220の後悔、B案、C案、D案のときは、それぞれ最悪で130、160、230の後悔となる
- したがって、ミニマックス後悔に従えば、B案が選ばれる

	自然の状態			
	良くなる	多少良くなる	変わらない	悪くなる
A案	250	200	50	-200
B案	150	100	10	-10
C案	280	40	5	-30
D案	50	50	30	20

	後悔表			
	自然の状態			
	良くなる	多少良くなる	変わらない	悪くなる
A案	30	0	0	220
B案	130	100	40	30
C案	0	160	45	50
D案	230	150	20	0

【例題11-7】不確実性下での意思決定

- 4つの自然の状態はすべて同じ確率 $\frac{1}{4}$ をもつと考える
- その結果, A案, B案, C案, D案に投資したときの期待利得は, それぞれ, 75, 62.5, 73.75, 37.5 である
- よって, ラプラスの原理に従えば, A案が選択される

	自然の状態				期待利得
	良くなる	多少良くなる	変わらない	悪くなる	
確率	1/4	1/4	1/4	1/4	
A案	250	200	50	-200	75
B案	150	100	10	-10	62.5
C案	280	40	5	-30	73.75
D案	50	50	30	20	37.5

リスクのもとでの意思決定

- 自然の状態について確率分布がわかる場合に用いることのできる代表的な意思決定原理を以下に述べる（ラプラスの原理に従う場合は、すべての状態は同じ確率でありと考える）
- なお、狭義の不確実性の場合（自然の状態について確率分布がわからない場合）であっても、データの収集や実験の実施によって、あるいは専門家や意思決定者自身の判断によって確率を推定することができる場合には、リスクの場合のとして対処できる
- なお、「リスク」という用語は一般には「危険」という意味で用いられることが多いが、ここでは「不確実性」の意味合いで、ネガティブなリスク（脅威）だけでなく、ポジティブなリスク（好機）もあると考える

【例題11-8】期待値原理

- 利得の期待値が最大となる代替案を選ぶ
- 今後の景気について、上昇する確率、横ばいである確率、下降する確率が、それぞれ0.7, 0.2, 0.1である場合を考えると、3つの代替案それぞれの期待利得（万円/月）は
 - オフィスビル： $100 \times 0.7 + 50 \times 0.2 + (-5) \times 0.1 = 79.5$
 - 店舗用ビル： $85 \times 0.7 + 60 \times 0.2 + 25 \times 0.1 = 74$
 - 住居用ビル： $70 \times 0.7 + 65 \times 0.2 + 50 \times 0.1 = 67$

となる

- したがって、期待値原理に従えば、オフィスビルに投資するという結果になる

代替案	自然の状態			期待利得
	上昇	横ばい	下降	
確率	0.7	0.2	0.1	
オフィスビル	100	50	-5	79.5
店舗用ビル	85	60	25	74
住居用ビル	70	65	50	67

【例題11-8】期待値原理

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		代替案	上昇	横ばい	下降	期待利得				
3	dummy	確率	0.7	0.2	0.1					
4	79.5	オフィスビル	100	50	-5	79.5	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C4:E4)			
5	74	店舗用ビル	85	60	25	74	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C5:E5)			
6	67	住居用ビル	70	65	50	67	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C6:E6)			
7						オフィスビル	=VLOOKUP(MAX(F4:F6),A4:B6,2,FALSE)			

【例題11-9】期待値・分散原理

- 利得の期待値だけでなく、**分散**も考慮して代替案の評価を行う
- 分散とは、期待値からの偏差の2乗の期待値で、変動性の大きさの尺度として用いられる。2乗の期待値から期待値の2乗を引くことでも計算することができる。
- 今後の景気について、上昇する確率、横ばいである確率、下降する確率がそれぞれ0.5, 0.3, 0.2の場合を考える
- このとき、3つの代替案について、利得の期待値と分散は以下の通りである
 - オフィスビル：期待値=64, 分散=1659
 - 店舗用ビル：期待値=65.5, 分散=527.25
 - 住居用ビル：期待値=64.5, 分散=57.25
- 利得の分散が最大（収益が不安定）であるのはオフィスビル、分散が最小（収益が安定的）であるのは住居ビルである
- これらの情報をもとに意思決定者がどのような選択をするかは、意思決定者の**リスク選好**の度合い（利得の不安定性というリスクをどの程度好むか）に依存する
- 多くの場合、リスクの増大はマイナスに評価される（**リスク回避**）傾向があり、その場合、住居ビルが選択される（期待利得に大きな差が見られないことに注意）
- 一般的には、「期待値・分散ともに大」と「期待値・分散ともに小」との比較になることが多い

オフィスビルの期待値

$$\text{期待値} = \text{確率1} * \text{結果1} + \text{確率2} * \text{結果2} + \text{確率3} * \text{結果3}$$

オフィスビルの分散

$$\text{分散} = \text{確率1} * (\text{結果1} - \text{期待値})^2 + \text{確率2} * (\text{結果2} - \text{期待値})^2 + \text{確率3} * (\text{結果3} - \text{期待値})^2$$

【例題11-9】期待値・分散原理

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		代替案	上昇	横ばい	下降	期待利得	分散						
3		確率	0.5	0.3	0.2								
4		オフィスビル	100	50	-5	64	1659	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C4:E4)		=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,(C4:E4-F4)^2)			
5		店舗用ビル	85	60	25	65.5	527.25	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C5:E5)		=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,(C5:E5-F5)^2)			
6		住居用ビル	70	65	50	64.5	57.25	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C6:E6)		=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,(C6:E6-F6)^2)			

【例題11-10】最尤未来原理

- 起こり得る自然の状態のうち、最も起こる可能性の高い状態だけに着目し、他の状態は考慮しない
- 上昇する確率、横ばいである確率、下降する確率がそれぞれ0.7, 0.2, 0.1である場合を考える
- このとき、最も起こる確率が高い自然の状態は「上昇」であり、この状態で最も利得が大きいのはオフィスビルである
- 意思決定が繰り返されることのない1回限りの状況で、ある1つの状態の確率が他を大きく引き離れた大きさである場合などに説得力をもつ
- その一方で、確率は小さくとも、起こった場合の損失が極めて大きい場合（保険をかけるような状況）では利用されにくい

【例題11-11】要求水準原理

- 意思決定者が得たいと考えている利得（**要求水準**）が明確な場合，要求水準を達成する可能性が最大となる代替案を選択する
- 上昇する確率，横ばいである確率，下降する確率がそれぞれ0.7，0.2，0.1である場合を考える
- 投資家の要求水準が50であるとすれば，3つの代替案（オフィスビル，店舗用ビル，住居用ビル）の要求水準達成確率は，それぞれ90%，90%，100%となる
- したがって，この倍には住居用ビルが選択される

代替案	自然の状態			要求水準 達成確率
	上昇	横ばい	下降	
確率	0.7	0.2	0.1	
オフィスビル	100	50	-5	0.9
店舗用ビル	85	60	25	0.9
住居用ビル	70	65	50	1.0

$$=0.7*1+0.2*1+0.1*0$$

$$=0.7*1+0.2*1+0.1*0$$

$$=0.7*1+0.2*1+0.1*1$$

【例題11-11】要求水準原理

- 組織，あるいは個人で実際に行われている意思決定の多くは，利得の最大化のような「最適化」の原理に従うのではなく，満足できる代替案を選択するという「満足化」の原理に従っているともいわれており，これは要求水準の考え方に通じる
- 結果の利得を評価することは困難であるが，結果に満足できるかできないかを決定することは可能である場合などにおいて，要求水準原理は説得力をもつ
- 要求水準を定め，それを達成するか否かによって代替案を評価するという方法は，代替案の設計や発見が困難（あるいは費用がかかるもの）であり，最善の代替案を広く探し求めることが得策ではない場合や，異なる代替案が時間的に異なった時点で現れるため，それらを蓄積して比較することが不可能な場合などにおいても有用であるといえる
- なお，要求水準は（意思決定者が同じであっても）一定不変というわけではなく，たとえば過去の経験など，さまざまな要因によって変化するものである

不確実性下での意思決定

- 不確実性の場合とリスクの場合について、代表的な意思決定原理を紹介した
- その中で、「前提となる意思決定原理を定めれば、それに沿った最善の代替案を選択することができる」ことを述べてはいるが、「**どの決定原理を選択すべきか（すべきでないか）**」については述べていない
- この選択は、意思決定者が自身の価値観や状況に応じて行うものであり、決定原理を選択するための決定原理はないといえる
- しかし、意思決定を合理的に行いたいと考えるのであれば、どのような意思決定原理を用いるのか、意識すべきである

【演習11-1】不確実性下での意思決定

- 以下の記述が適切かどうかを，理由とともに答えなさい
 - 期待値原理によって代替案を選択した結果，考えられる可能性の中で最悪の（利得が最も少ない）結果となることがあり得る
 - 要求水準原理は，結果（利得）の評価を「満足」か「不満足」かに二分して捉える考え方であるといえる
 - 意思決定の機会が複数回あるならば，最尤未来原理を選択してはならない

【演習11-1】不確実性下での意思決定

配布用

目次

- 第1回 ガイダンス, オペレーションズリサーチとは
- 第2回 最適化問題
- 第3回 連続最適化
- 第4回 組合せ最適化
- 第5回 ネットワーク最適化1
- 第6回 ネットワーク最適化2
- 第7回 シミュレーション1
- 第8回 シミュレーション2
- 第9回 待ち行列理論1
- 第10回 待ち行列理論2
- 第11回 不確実性下での意思決定 (意思決定原理)
- 第12回 不確実性下での意思決定 (ディシジョンツリー・効用)
- 第13回 ゲーム理論
- 第14回 物流2024年問題

ディシジョンツリー

- リスクのもとでの意思決定（とくに多段階の意思決定）に用いられるツールとして、ディシジョンツリーがある
- 左から右に向かって時間が経過するものとみなす
- 意思決定者が決定を行う点は**決定点**などと呼ばれ、四角（□）印で表される
- ある確率分布に従って自然の状態が決まる点は**不確定点**などと呼ばれ、丸（○）印で表される
- 決定点での分岐においては代替案のすべてが、不確定点での分岐では自然の状態のすべての図に現れている必要があり、かつ、分岐は互いに排反でなくてはならない。すなわち、決定点においては、そこから出ている分岐のどれか1つだけが必ず選択され、不確定点においては、そこから出ている分岐のどれか1つだけが必ず生起する
- 分岐が途中で合流することはない
- ディシジョンツリーによる意思決定では期待値原理を用いる
- 具体的には、右から左に向かって、不確定点では期待利得の計算を、決定点では期待利得の一番高い分岐（代替案）の選択を順に行っていく

ディシジョンツリー

- リスクのもとでの意思決定（とくに多段階の意思決定）に用いられるツールとして、ディシジョンツリーがある
- 左から右に向かって時間が経過するものとみなす
- 意思決定者が決定を行う点は**決定点**などと呼ばれ、四角（□）印で表される
- ある確率分布に従って自然の状態が決まる点は**不確定点**などと呼ばれ、丸（○）印で表される
- 決定点での分岐においては代替案のすべてが、不確定点での分岐では自然の状態のすべての図に現れている必要があり、かつ、分岐は互いに排反でなくてはならない。すなわち、決定点においては、そこから出ている分岐のどれか1つだけが必ず選択され、不確定点においては、そこから出ている分岐のどれか1つだけが必ず生起する
- 分岐が途中で合流することはない
- ディシジョンツリーによる意思決定では期待値原理を用いる
- 具体的には、右から左に向かって、不確定点では期待利得の計算を、決定点では期待利得の一番高い分岐（代替案）の選択を順に行っていく

【例題12-1】ディシジョンツリー 投資

- 例題11-7について，ディシジョンツリーを用いて表現せよ

【例題11-7】期待値原理

- 利得の期待値が最大となる代替案を選ぶ
- 今後の景気について，上昇する確率，横ばいである確率，下降する確率が，それぞれ0.7，0.2，0.1である場合を考えると，3つの代替案それぞれの期待利得（万円/月）は
 - オフィスビル： $100 \times 0.7 + 50 \times 0.2 + (-5) \times 0.1 = 79.5$
 - 店舗用ビル： $85 \times 0.7 + 60 \times 0.2 + 25 \times 0.1 = 74$
 - 住居用ビル： $70 \times 0.7 + 65 \times 0.2 + 50 \times 0.1 = 67$

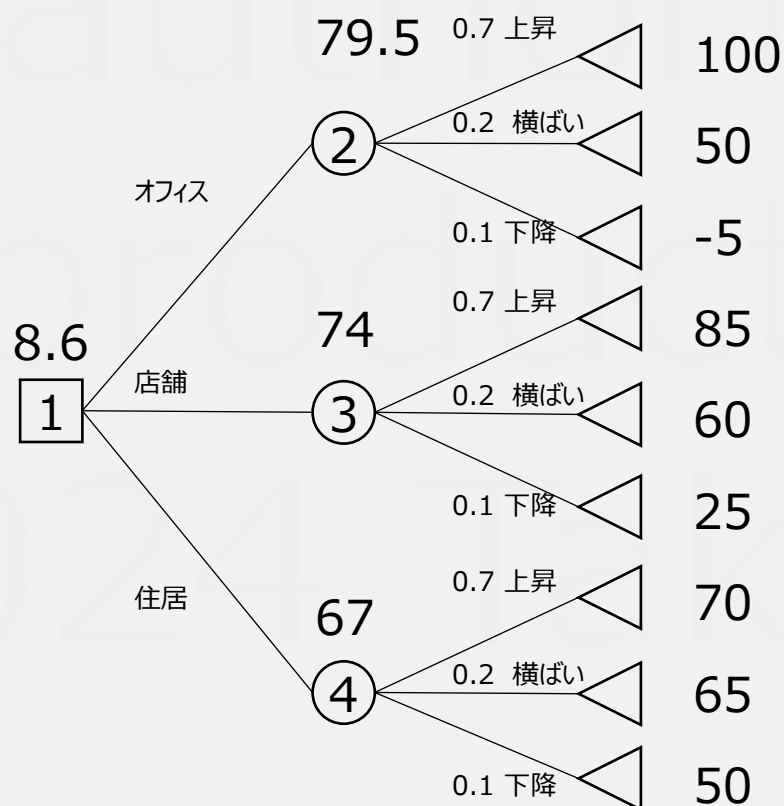
となる

- したがって，期待値原理に従えば，オフィスビルに投資するという結果になる

自然の状態				
代替案	上昇	横ばい	下降	期待利得
確率	0.7	0.2	0.1	
オフィスビル	100	50	-5	79.5
店舗用ビル	85	60	25	74
住居用ビル	70	65	50	67

【例題12-1】ディシジョンツリー 投資

- 例えば、不確定点2以降の部分に着目すると、これは、70%の確率で100、20%の確率で50、10%の確率で-5の利得が得られることを表している
- ディシジョンツリーでは、これを79.5の利得が確実に得られることと同等とみなして評価する

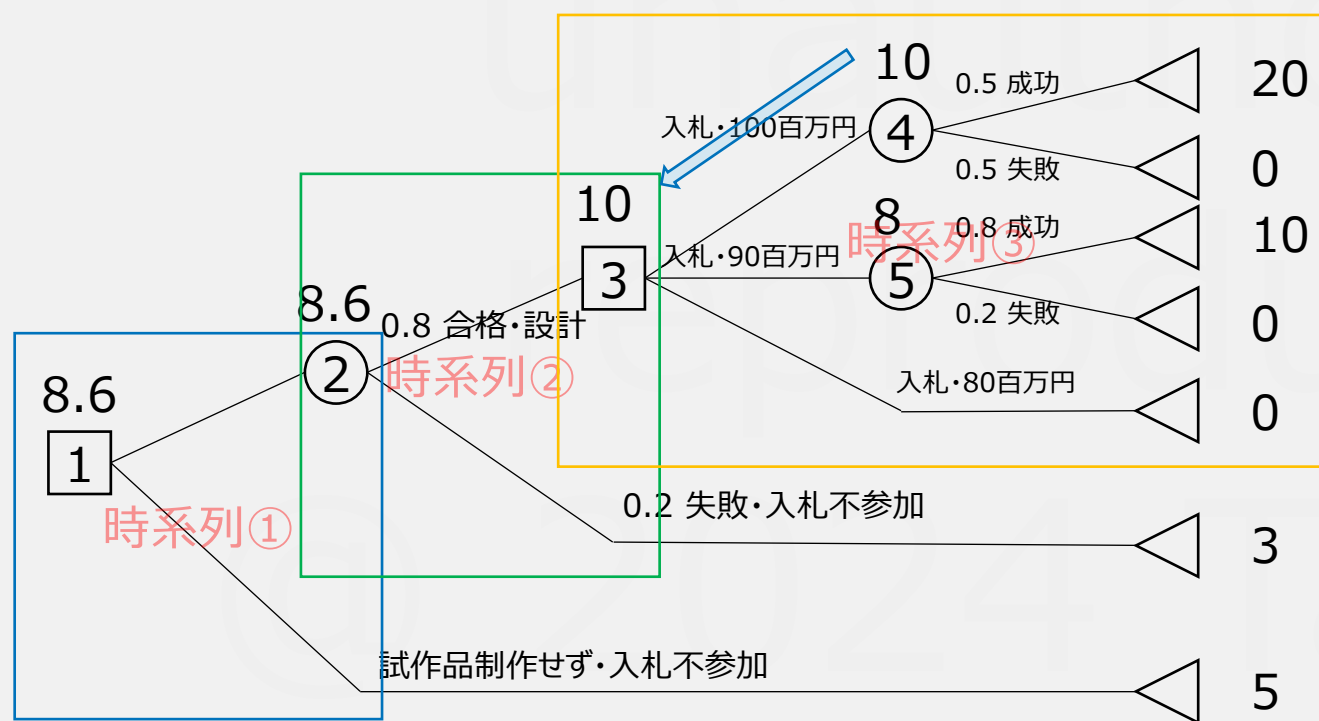


【例題12-2】多段階意思決定 入札

- 機械製造会社が、ある特殊機械の入札に参加するかどうかを検討している
- 入札に参加する場合は、まず試作品を作り、求められている特殊機械を制作できるかどうか確認する必要がある。このために2百万円必要であり、合格品を制作できる可能性は80%である。合格品の制作に成功すれば、3百万円をかけて設計図を完成させ、入札に参加することになる。合格品の制作に失敗すれば、入札は諦める。
- 入札価格として、100百万円、90百万円、80百万円の3つが考えられ、それぞれについて、落札できる可能性は50%、80%、100%であると見積もった
- 落札に成功した場合、特殊機械は75百万円で製造できる
- 入札に参加しない、もしくは落札に失敗し場合には、5百万円の利益が期待できる別の仕事を受けることができる（落札に成功した場合は、この仕事を受ける余裕はない）
- このとき、どのような決断を下すのがよいか

【例題12-2】多段階意思決定 入札

- ディジョンツリーは以下の図で表される（金額の単位は百万円）



【例題12-1】多段階意思決定 入札

- 機械製造会社が、ある特殊機械の入札に参加するかどうかを検討している
- 入札に参加する場合は、まず試作品を作り、求められている特殊機械を制作できるかどうかを確認する必要がある。このために2百万円必要であり、合格品を制作できる可能性は80%である。合格品の制作に成功すれば、3百万円をかけて設計図を完成させ、入札に参加することになる。合格品の制作に失敗すれば、入札は諦める。
- 入札価格として、100百万円、90百万円、80百万円の3つが考えられ、それぞれについて、落札できる可能性は50%、80%、100%であると見積もった
- 落札に成功した場合、特殊機械は75百万円で製造できる
- 入札に参加しない、もしくは落札に失敗した場合には、5百万円の利益が期待できる別の仕事を受けることができる（落札に成功した場合は、この仕事を受ける余裕はない）
- このとき、どのような決断を下すのがよいか

【例題12-2】多段階意思決定 入札

- まず、すべての結果について利得を計算する
- 次に、不確定点4, 5における期待利得を計算した後、決定点3において、入札価格を決定する（期待利得の最も高い入札価格を選択する）
- さらに、不確定点2において期待利得を計算し、最後に決定点1で試作品を制作するかどうか決定する
- よって、ディシジョンツリーによって導かれる結論は、「入札に参加するために試作品制作を行うこととし、合格品の制作に成功した場合は入札価格を100百万円とする」となる

効用

- 人は、受取金額の期待値が最大、または損失金額の期待値が最小となるように意思決定をするとは限らない
- 当事者が感じる有難さ・満足の度合い（当事者にとっての価値）を**効用**と呼び、これを意思決定の基準に用いる考え方がある
- x 円の効用を関数 $U(x)$ （**効用関数**と呼ぶ）で表すとする
- 一般に、受け取る金額が高いほど効用も大きいと考えら得るため、 $U(x)$ は非減少関数であるといえる
- 効用が金額に比例する場合、 $U(x)$ は線形となるが、経済学などでは「金額の増加により得られる効用は、それまでに保有している金額が大きいほど小さい」と考えることが多い
- この場合、効用関数 $U(x)$ は凹関数となる
- なお、効用関数の傾きは最後の1単位によって得られる効用に対応し、**限界効用**と呼ばれ、上の性質は**限界効用逓減（げんかいこうようていげん）の法則**と呼ばれる（この法則が常に成り立つというわけではなく、経験則としてよく用いられる過程のひとつと捉えればよい）

【例題12-3】効用

- 以下の3つの状況で，期待金額が大きい，または期待損失金額が小さい選択肢は，いずれとなるか
- 状況1
 - A：100万円もらえる
 - B：偏りのないコインを1回投げる．表が出たら何ももらえないが，裏が出たら202万円もらえる．
- 状況2ーあなたはいま2万円しか持っていない
 - A：10円を確実に失う
 - B：1/2500の確率でその2万円を失うが，2499/2500の確率で何も失わない
- 状況3 サンクトペテルブルクのパラドックス
 - A：1万円もらえる
 - B：偏りのないコインを裏が出るまで投げる．投げた回数を n 回として， 2^n 円もらえる．例えば，4回続けて表が出た後，5回めに裏が出たとすれば， $2^5 = 32$ 円もらえる．

【例題12-3】効用

- 以下の3つの状況で，期待金額が大きい，または期待損失金額が小さい選択肢は，いずれの場合もBである
- 状況1
 - A：100万円もらえる
 - B：偏りのないコインを1回投げる．表が出たら何ももらえないが，裏が出たら202万円もらえる．（期待金額＝101万円）
- 状況2ーあなたはいま2万円しか持っていない
 - A：10円を確実に失う
 - B：1/2500の確率でその2万円を失うが，2499/2500の確率で何も失わない（期待損失金額＝8円）
- 状況3 サンクトペテルブルクのパラドックス
 - A：1万円もらえる
 - B：偏りのないコインを裏が出るまで投げる．投げた回数を n 回として， 2^n 円もらえる．例えば，4回続けて表が出た後，5回めに裏が出たとすれば， $2^5 = 32$ 円もらえる．（期待金額＝ ∞ ）

期待効用最大化の原理

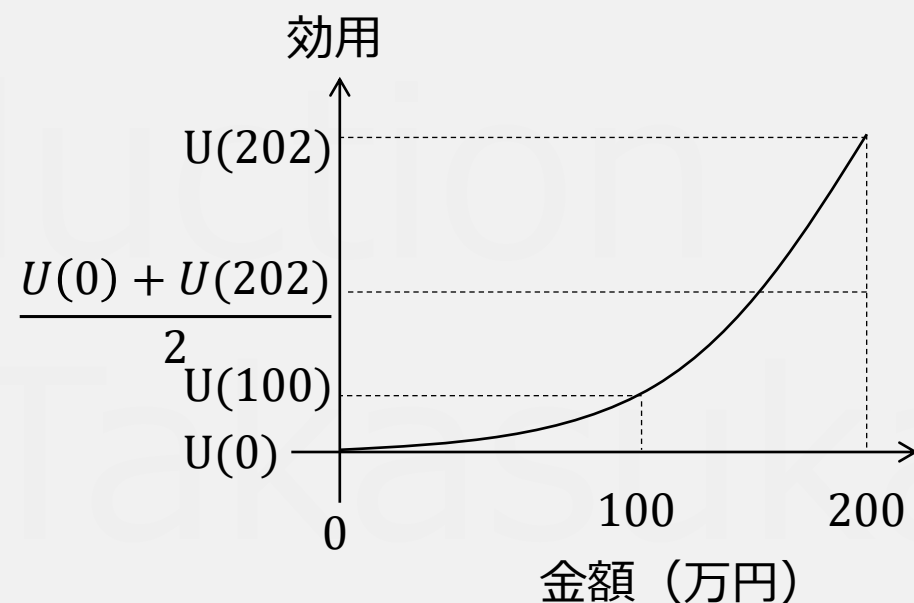
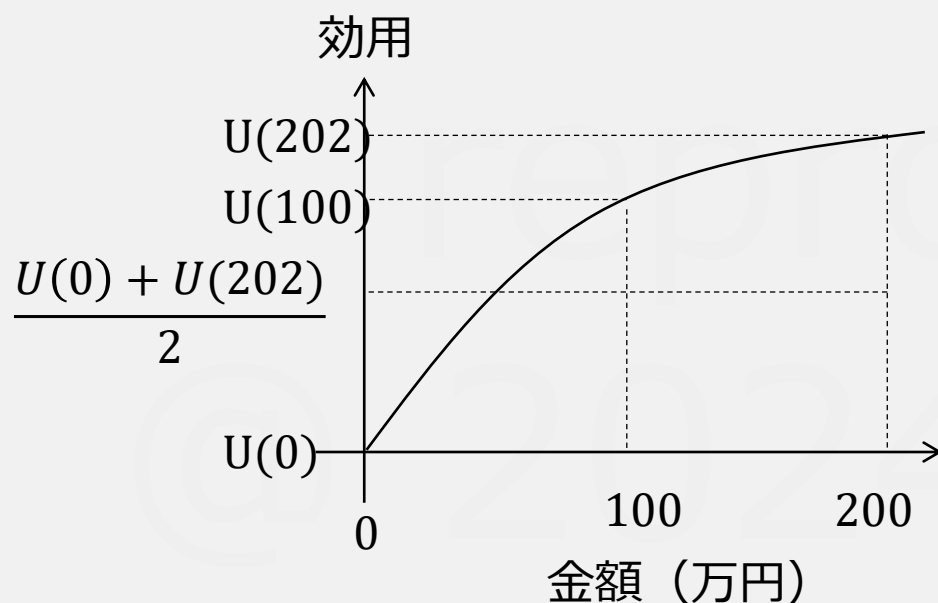
- ある代替案が不確実性を伴う場合、その効用を期待値（期待効用）で表すとして、期待効用が最大となる代替え案を選ぶ考え方を期待効用最大化の原理という
- 一般に、効用関数が凹であれば、当たり外れ（リスク）のあるくじよりも、その期待金額と同等の現金のほうを好むことになり、**リスク回避的**であるといえる。逆に効用関数が凸であれば、現金よりもくじを好むことになり、**リスク愛好的**となる。効用関数が直線の場合は、くじと現金を同程度好むことになり、**リスク中立的**である。
- 個人の効用関数の形が、金額の小さい部分では凸、ある金額以上では凹と仮定すると、同じ人が宝くじを購入するなど小さな投資額で大きな収益を狙おうとする一方で、期待損失金額以上の保険料を支払ってまで保険をかけるという事実をうまく説明することができる

【例題12-4】期待効用最大化の原理

- 状況1において, x 万円の効用を $U(x)$ とすると, 代替案A, Bの期待効用はそれぞれ $U(x), \frac{U(0)+U(202)}{2}$ となる
- これらを比較して, 前者が大きい場合には代替案Aが, 後者が大きい場合は代替案Bが選択されるということになる
- ここで, どちらが選ばれるかは効用関数 $U(x)$ の形状による
- 効用関数がどのような形状であれば, それぞれ代替案A, 代替案Bが選ばれるか
- 状況1
 - A : 100万円もらえる
 - B : 偏りのないコインを1回投げる. 表が出たら何ももらえないが, 裏が出たら202万円もらえる.

【例題12-4】期待効用最大化の原理

- 例えば、効用関数が以下の左のような関数であれば代替案Aが選ばれ、右のような関数であれば代替案Bが選ばれる



【例題12-5】期待効用最大化の原理

- ベルヌーイは、サンクトペテルブルクのパラドックスを回避する方法として、「財産の増加に対する効用の増加量は、それまでに保有している財産の量に反比例する」と考えることを提案した
- x 円の効用を $U(x)$ として、これを式で表すと $\frac{dU(x)}{dx} = \frac{k}{x}$ であり、これより $U(x) = k \log x + C$ となる
- サンクトペテルブルクのパラドックスの例では、代替案 B の期待効用は

$$\frac{1}{2} \cdot U(2) + \frac{1}{2^2} \cdot U(2^2) + \frac{1}{2^3} \cdot U(2^3) + \dots$$

である

- 例えば、 $U(x) = \log x$ として期待効用を計算すると、

$$\frac{1}{2} \cdot \log 2 + \frac{1}{2^2} \cdot \log 2^2 + \frac{1}{2^3} \cdot \log 2^3 + \dots = \log 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots \right) = 2 \log 2 = U(4)$$

となり、代替案Bの効用は、4円の効用と等しい

【演習12-1】期待効用最大化の原理 投資

- 投資額1万円で、成功すれば（投資額を差し引いて）100万円の利益があるが、失敗すれば投資額を全額失う投資計画がある
- 成功確率が0.005(0.5%)であり、以下の表のような効用関数をもつ意思決定者が期待効用最大化の原理にしたがって行動するとき、この計画に1万円を投資すると考えるか
- 投資する場合と投資しない場合の期待効用をそれぞれ計算し、比較することで結論を導くこと

金額 x (万円)	-100	-1	-0.5	0	100
効用 $U(x)$	-800	-1	-0.8	0	250

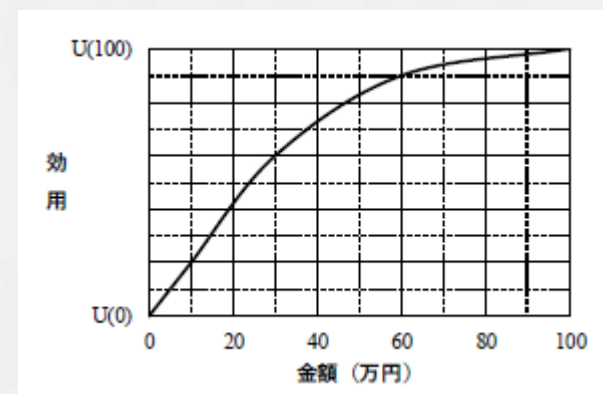
【演習12-1】期待効用最大化の原理 投資

配布用

【演習12-2】期待効用最大化の原理 くじ

- 以下4種類のくじがあり，これらのくじのうち1枚だけもらえるとする
- 下のグラフのような効用関数をもつ人が期待効用最大化の原理にしたがってくじを選択する場合，どのくじが選ばれるか

くじ	賞金	当選確率
A	10万円	0.9
B	30万円	0.7
C	60万円	0.4
D	100万円	0.1



【演習12-2】期待効用最大化の原理 くじ

配布用

【演習12-3】期待効用最大化の原理 入札

- 例題12-2について，起こり得る結果の評価に，紙幣価値（百万円）ではなく，効用を用いることを考える
- x 万円の効用 $U(x)$ を $U(x) = \sqrt{x}$ としたとき，どのような決定をすることになるか

【例題12-2】多段階意思決定 入札

- 機械製造会社が，ある特殊機械の入札に参加するかどうかを検討している
- 入札に参加する場合は，まず試作品を作り，求められている特殊機械を制作できるかどうか確認する必要がある．このために2百万円必要であり，合格品を制作できる可能性は80%である．合格品の制作に成功すれば，3百万円をかけて設計図を完成させ，入札に参加することになる．合格品の制作に失敗すれば，入札は諦める．
- 入札価格として，100百万円，90百万円，80百万円の3つが考えられ，それぞれについて，落札できる可能性は50%，80%，100%であると見積もった
- 落札に成功した場合，特殊機械は75百万円で製造できる
- 入札に参加しない，もしくは落札に失敗し場合には，5百万円の利益が期待できる別の仕事を受けることができる（落札に成功した場合は，この仕事を受ける余裕はない）
- このとき，どのような決断を下すのがよいか

【演習12-3】期待効用最大化の原理 入札

配布用