

目次

- 第1回 ガイダンス, オペレーションズリサーチとは
- 第2回 最適化問題
- 第3回 連続最適化
- 第4回 組合せ最適化
- 第5回 ネットワーク最適化1
- 第6回 ネットワーク最適化2
- 第7回 シミュレーション1
- 第8回 シミュレーション2
- 第9回 待ち行列理論1
- 第10回 待ち行列理論2
- 第11回 不確実性下での意思決定 (意思決定原理)
- 第12回 不確実性下での意思決定 (ディシジョンツリー・効用)
- **第13回 ゲーム理論**
- 第14回 物流2024年問題

ゲーム理論

- ゲーム理論とは、複数の意思決定者が合理的な行動をとる状況を論理的に取り扱うための方法論である
- ここで、「合理的」な行動とは、「他の人々がどのような行動をとるか考慮しつつ、自分の利得が最大となる（損失が最小となる）策を選択すること」を意味している
- ゲーム理論は、様々な状況において、他社との関係を踏まえながら自分の置かれている立場と選択すべき行動について論理的に整理し、考察する際の有用なツールとなり得ると考えられている
- ゲーム理論では、意思決定者のことを**プレイヤー**と呼び、プレイヤーのとり得る決定・行動をそのプレイヤーの**戦略**と呼ぶ
- 各プレイヤーは複数の戦略をもっており、その中から1つを選ぶことになる
- その結果（**利得**）は、自分がどの戦略を選択したかだけでなく、他のプレイヤーの意思決定にも依存する
- なお、ここで扱う例に解いては、利得は必ずしも正確な数値である必要はなく、結果の好ましい順に値が大きくなっていけばよい

【例題13-1】ゲーム理論 価格引き下げ競争

- 2つの企業A, Bが同種の商品を同じ価格で販売しており, 今期の利潤はともに4億と見積もられている
- 両社はそれぞれ来期の価格について, 「今期の価格を維持する」か「引き下げる」か検討しており, 来期の利潤について, 以下のような見積もりをしている
 - 両社ともに価格を維持すれば, 今期と同様それぞれ4億円
 - 一方のみが引き下げた場合, 消費者が低価格の商品に流れ, 引き下げた方は6億円, 維持した方は1億円
 - 両社ともに引き下げた場合, 消費者が低価格の商品に流れ, 引き下げた方は6億円, 維持した方は1億円
 - 両社ともに引き下げた場合, 需要は増すものの商品1個あたりの賭けが減少し, 利潤はともに2億円
- 両社は, 自社の来期の利潤をできるだけ大きくすることを目的として, お互い話し合うことなく, また相手の決定を知ることなしに自社の商品の価格を決定するものとする (**非協力ゲーム**と呼ばれる)
- このとき, 両社にとって, 価格をどのように設定するのが合理的であるか

【例題13-1】ゲーム理論 価格引き下げ競争

- この状況を「ゲーム」として表現すると、以下のとおりである
 - プレイヤー：A社, B社
 - 戦略：両者とも、価格を「維持する」と「引き下げる」の2つ
 - 利得：来期の自社の利潤
- プレイヤーが2人のときは行列を用いて利得を表現するとわかりやすい
- 以下を利得行列とよぶ

A\B	維持	引き下げ
維持	4, 4	1, 6
引き下げ	6, 1	2, 2

【例題13-1】ゲーム理論 価格引き下げ競争

- まず、両社が価格を維持した場合、どちらも利潤は4億円
- 次に、片方の企業が価格を引き下げた場合、引き下げた企業は6億円の利潤を得る一方、価格を維持した企業は1億円の利潤となる
- 最後に、両社が価格を引き下げた場合、需要は増えるが、商品1個あたりの利益は減少し、両社の利潤は2億円となる
- 以上の結果を考慮すると、一方の企業が価格を引き下げる場合、その企業は6億円の利潤を得ることができる。しかし、もう一方の企業は価格を維持するため、利潤は1億円になる。
- したがって、両社にとって合理的な選択は、どちらも価格を維持すること。これにより、両社は4億円の利潤を確保することができる。

A\B	維持	引き下げ
維持	4, 4	1, 6
引き下げ	6, 1	2, 2

支配戦略

- 他のプレイヤーの戦略に関係なく、自分にとって常に他の戦略よりも高い利得が得られる戦略のことを**支配戦略**と呼ぶ（または**絶対優位の戦略**ともいう）
- 支配戦略が存在するならば、プレイヤーはその戦略を選択すると考えられる
- 自分の戦略の中に支配戦略が存在しなくても、相手に支配戦略があれば（かつ、相手が合理的に行動すると確信できれば）、相手の支配戦略に対して最良の戦略を選択すればよい

【例題13-2】ゲーム理論 支配戦略

- 例題13-1について、以下のような利得行列が与えられている場合、A社、B社の合理的な戦略はどうか

A\B	維持	引き下げ
維持	4, 4	3, 6
引き下げ	6, 1	2, 2

【例題13-2】ゲーム理論 支配戦略

- 例題13-1について、以下のような利得行列が与えられている場合、A社、B社の合理的な戦略は、それぞれ、「維持」、「引き下げ」である

A\B	維持	引き下げ
維持	4, 4	3, 6
引き下げ	6, 1	2, 2

囚人のジレンマ

- 「価格引き下げ競争」の例では、2人のプレイヤーがそれぞれ自分の利得を大きくしようと行動した結果、双方にとってよりよい状態があるにもかかわらず、それよりも悪い状態に陥ってまっている
- このように、両プレイヤーに支配戦略が存在し、両プレイヤーが支配戦略を選択するよりも双方にとってより良い戦略の組合せが存在するゲームのことを**囚人のジレンマ型ゲーム**とよぶ
- この状態を避けるため、事前に双方が話し合い、合意を取り交わしたとしても（例題では、両者共価格を維持するように合意したとしても）、互いに相手を信用することができなければ有効ではない
- しかし、裏切った相手にペナルティを科すことができる場合には、双方にとって望ましい結果が導かれることもある

【例題13-3】ゲーム理論 囚人のジレンマ

- A社, B社ともに, 両社の価格を引き下げることになるならば, 両社とも価格を維持するほうがよいと考えている
- そこで, 両社とも価格を維持することとし, 違反した場合はペナルティとして相手に3億円支払うことで合意したとする
- この場合, 利得行列はどうなり, その選択をすることになるか

A\B	維持	引き下げ
維持		
引き下げ		

【例題13-3】ゲーム理論 囚人のジレンマ

- A社, B社ともに, 両社の価格を引き下げることになるならば, 両社とも価格を維持するほうがよいと考えている
- そこで, 両社とも価格を維持することとし, 違反した場合はペナルティとして相手に3億円支払うことで合意したとする
- この場合, 利得行列は以下のとおりであり, 両社はともに「維持」を選択することになる (ただし, この手段は法律的には問題がある)

A \ B	維持	引き下げ
維持	4, 4	4, 3
引き下げ	3, 4	2, 2

- この例で, 「そもそも合意が成立するのか」という問題もあるが, 両社にとって「合意する」ことで得られる利得 (両者とも「維持」で4億円) が「合意しない」ことで得られる利得 (両者とも「引き下げ」で2億円) を上回るため, 「合意する」ことが合理的な判断といえる
- しかし, 罰則が機能しない場合や罰則という考え方が馴染まない場合には, 別の解決策が必要になる (後述の「繰返しゲーム」参照)

ナッシュ均衡

- ナッシュ均衡とは、非協力を前提としたゲームにおいて、他のプレイヤーとの関係性のなかで全員が最適な戦略を取っている状態（すべてのプレイヤーが「均衡」を保っている）を指すものである
- ナッシュ均衡においては、自分だけが戦略を変えても得をしない
- 例えば、競合との価格競争で低価格戦略を取ると利益がマイナスになる状況では、どちらも現状のままでいるのが利益を得るためには最適な戦略となる
- つまり、両方で均衡を保っている状態であり、これがナッシュ均衡である
 - 最適反応戦略－相手の戦略を前提として、自らの利得を最大にする戦略
 - ナッシュ均衡－プレイヤーの戦略が互いに最適反応戦略となるような、戦略の組合せ

【例題13-4】ナッシュ均衡 ビルの投資競争

- ある地方都市の駅前に「小ビル」と「大ビル」という2つのビルがあり、現状では大ビルのほうが高い収益を得ている
- 今、2つのビルはやや古くなってきたため、両ビルのオーナーはともに建替えを考えている
- もし、一方のビルのみが建替えを行えば、そのビルの集客力が上昇し、収益が建替え費用を上回るが、両方とも建替えてしまえば、ともにメリットは少なくなってしまう
- この状況における利得行列が以下で与えられているとする（利得の単位は億円）
- 支配戦略を前提としたとき、両社において、どのような選択をするのがよいか

小ビル\大ビル	現状維持	建替え
現状維持	4, 8	2, 10
建替え	6, 6	1, 4

【例題13-4】ナッシュ均衡 ビルの投資競争

- ある地方都市の駅前に「小ビル」と「大ビル」という2つのビルがあり、現状では大ビルのほうが高い収益を得ている
- 今、2つのビルはやや古くなってきたため、両ビルのオーナーはともに建替えを考えている
- もし、一方のビルのみが建替えを行えば、そのビルの集客力が上昇し、収益が建替え費用を上回るが、両方とも建替えてしまえば、ともにメリットは少なくなってしまう
- この状況における利得行列が以下で与えられているとする（利得の単位は億円）
- 支配戦略を前提としたとき、両社とも支配戦略をもたない
- ナッシュ均衡は「小ビルが現状維持、大ビルが建替え」と「小ビルが建替え、大ビルが現状維持」の2つである

小ビル\大ビル	現状維持	建替え
現状維持	4, 8	2, 10
建替え	6, 6	1, 4

ナッシュ均衡

- ナッシュ均衡は、自分だけが戦略をしても得をしない状態であり、お互い相手の戦略を完全に読みあつた先に行き着くゲームの結果であると解釈できる
- ナッシュ均衡の考え方は、社会科学、自然科学問わず、様々な分野で用いられている
- 必ずしもナッシュ均衡が互いにとって最適な状態であるとは限らない（例：「価格引き下げ競争」）
- ナッシュ均衡は1つとは限らず、複数存在することもある。また、存在しないこともある。ただし、複数の戦略を確率的に選択することが許される場合には、必ずナッシュ均衡が存在することが知られている

弱虫ゲーム

- 「ビルの投資競争」の例では、建替えに成功したほうが勝手で、現状維持のほうが敗者（弱虫）になる
- しかし、双方が勝者になろうとしても建替えを行ってしまえば、両者とも不利益を被ることになるため、そうなるよりは自分が「弱虫」となったほうがましである
- このようなゲームは**弱虫ゲーム**と呼ばれている

【例題13-5】弱虫ゲーム

- いま自分が「小ビル」のオーナーだとして、何とかして自分だけが勝者になりたいと考えている
- ひとつの方法は、小ビルの建替えを実行する前に、早々に大きなテナントと建替えを前提とした契約を結んでしまうことである
- ただし、「ビルの建替えを行わなかったら2億円の違約金を払う」こととする
- このとき、利得行列はどのように変化し、どのような選択（支配戦略）を取ることになる

小ビル\大ビル	現状維持	建替え
現状維持	4, 8	2, 10
建替え	6, 6	1, 4

【例題13-5】弱虫ゲーム

- いま自分が「小ビル」のオーナーだとして、何とかして自分だけが勝者になりたいと考えている
- ひとつの方法は、小ビルの建替えを実行する前に、早々に大きなテナントと建替えを前提とした契約を結んでしまうことである
- ただし、「ビルの建替えを行わなかったら2億円の違約金を払う」こととする
- これにより、利得行列は以下のように変わる
- 結果として、「建替え」が小ビルの支配戦略となり、大ビルのオーナーがこれを知れば、「現状維持」を選ばざるを得なくなる
 - 小ビルのオーナーが建替えを前提とした契約を行ったことを大ビル側に認識させなければその効果はない
 - 上のような契約を結ばなくても（利得行列を変化させなくても）、大ビルより先に建替えを行ってしまえば、大ビルは現状維持を取らざるを得ない。この場合、両プレイヤーの意思決定が同時に行われるのではなく、各プレイヤーの意思決定は順に行われていることになる（相互ゲームと呼ばれる）

小ビル\大ビル	現状維持	建替え
現状維持	2, 8	0, 10
建替え	6, 6	1, 4

繰返しゲーム

- 同じゲームを何度も繰返し行うゲームのことを**繰返しゲーム**と呼ぶ
- 以下では、「価格の引き下げ競争」を例に、囚人のジレンマ型のゲームを繰返し行ったときの状況を考察する
- A, B両社が来期（第1期）だけでなく、その次の期（第2期）まで考慮し、2つの期の利潤の合計を最大化することを目指して行動するものとする
- なお、第2期の価格を決定する際には、両社ともに第1期の相手の価格を知っているものとする
- このとき、A, Bそれぞれにとって戦略とは、単に「第1期は引き下げ、第2期は維持」といった、2回の選択を事前に決めておくものだけではなく、「第1期は維持、第2期は第1期に相手がとった戦略を選ぶ」など、相手が過去に選択した戦略に依存するものであってもよい
- 結論は、「2期とも価格を引き下げる」が両社にとって合理的な戦略となる
- つまり、両社が2期とも価格を維持すれば双方によって利得は最大になるにもかかわらず、相手を「裏切って」価格の引き下げを選択してしまう
- これは、ゲームを3回以上繰返される場合でも同様であり、繰返し回数が有限である限り、両社とも相手を裏切り続ける戦略をとる

A\B	維持	引き下げ
維持	4, 4	1, 6
引き下げ	6, 1	2, 2

無限回繰返しゲーム

- ゲームが無限回繰返される場合、あるいは、両社とも最後の期を認識することがないくらいゲームが繰返される場合を考える
- この場合においても、「両社が毎朝、価格を引き下げる」という状態はやはり合理的であるが、両社が互いに以下の戦略（**トリガー戦略**と呼ばれる）をとることも合理的な戦略の組合せであることが知られている
 - 第1期は「価格維持」とする
 - 第2期以降は、前の期に相手が「引き下げ」を行えば、それ以降永遠に「引き下げ」を選択することとして、相手が「引き下げ」を行わなければ「維持」することとする
- この場合、一旦相手を裏切って「価格の引き下げ」を行うと、一時的には高い利得が得られるが、「報復」として相手も「引き下げ」を行うため、以後、利得が低い水準に抑えられてしまう
- この報復の脅しにより、両社互いに裏切らず、「価格の維持」を選択し続けることになる

A\B	維持	引き下げ
維持	4, 4	4, 3
引き下げ	3, 4	2, 2

【演習13-1】ゲーム理論

- 以下の利得表が与えられたとき、A、Bはそれぞれの戦略を取るのがよいか

A\B	戦略1	戦略2	戦略3
戦略1	1, 1	2, 2	-2, -2
戦略2	3, 3	-2, 4	1, 1

【演習13-1】ゲーム理論

配布用

【演習13-2】ゲーム理論

- 以下の利得表が与えられたとき、A、Bはそれぞれの戦略を取るのがよいか

A\B	戦略1	戦略2
戦略1	-5, -5	3, 0
戦略2	0, 3	1, 1

A\B	戦略1	戦略2
戦略1	1, 3	-3, -3
戦略2	-1, -1	3, 1

A\B	戦略1	戦略2
戦略1	-1, -1	-5, 1
戦略2	1, -5	-3, -3

A\B	戦略1	戦略2
戦略1	3, 3	-1, -1
戦略2	-1, -1	2, 2

【演習13-2】ゲーム理論

配布用

【演習13-2】ゲーム理論

配布用

【演習13-2】ゲーム理論

配布用

【演習13-2】ゲーム理論

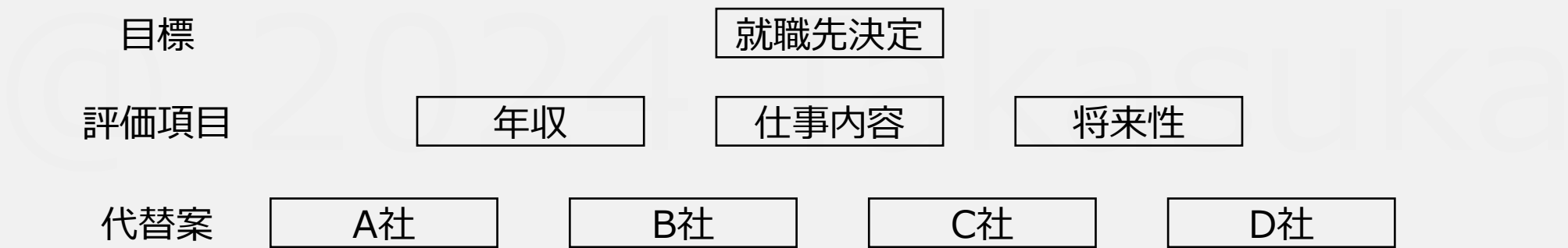
配布用

AHP (Analytic Hierarchy Process, 階層分析法/階層化意思決定法)

- 1970年代, T. L. Saaty によって開発された意思決定手法で, 政策決定, 経営問題, 軍縮問題, 人事評価, プロジェクト選定, ポートフォリオ選択, 都市計画など, 幅広い分野で利用することができる
- 有名な事例に, ペルー日本大使館占領事件における解決策の選択問題, フィンランドにおける原子力発電所建設の可否に対する国会審議, 日本における首都機能移転候補地選択問題などがある
- AHPでは, 意思決定の問題を, 「目標」「評価項目」「代替案」という3段階の階層構造として捉える
- この構造を図で表現したものを**階層図**と呼ぶ

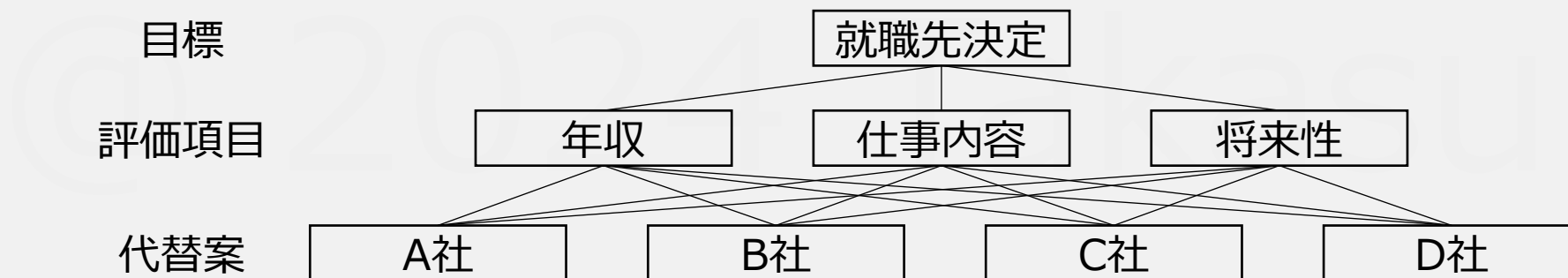
【例題13-6】AHP

- 就職先の評価項目を「年収（福利厚生を含む）」、「仕事内容（専門を活かせるやりがい）」、「将来性（会社の知名度を含む）」の3点に絞ったとすれば、階層図はどうか



【例題13-6】AHP

- 就職先の評価項目を「年収（福利厚生を含む）」、「仕事内容（専門を活かせるやりがい）」、「将来性（会社の知名度を含む）」の3点に絞ったとすれば、階層図は以下のようなになる
- ある1つの評価項目だけに着目した場合、代替案の相対的劣勢を判断することがそれほど難しくないのであるようにする必要がある
- 一般的に、ある評価項目についてはある代替案がよく、別の評価項目については別の代替案がよい、といった状況になる（2つの代替案A, Bに対して、すべての項目においてAがBに劣るならば、そもそもAを代替案として考慮する必要がない）
- 互いに類似性のある評価項目が存在する場合（例えば、「仕事内容」をもう少し細分化し、「スキル」と「興味」の2項目に分けた場合など）、階層を増やして考えてもよい



代替案の評価

- 複数の評価項目を考慮して代替案を1つ決定するために,
 - 評価項目のそれぞれが, 相対的にどれだけ重要であるかを表す「重要度」
 - 各評価項目に関して, 各代替案が相対的にどの程度優れているかを表す「相対評価点」

を決定したうえで, 各代替案に対して評価点の加重和 (「重要度」×「相対評価点」の合計) を計算し, これを総合評価点とする

【例題13-7】代替案の評価

- 仮に、年収、仕事内容、将来性の重要度がそれぞれ0.3, 0.5, 0.2で、各代替案の相対評価点が以下の表で与えられているとすれば、どの選択を取るべきか

	年収	仕事内容	将来性
A社	0.40	0.10	0.45
B社	0.35	0.40	0.20
C社	0.20	0.20	0.25
D社	0.05	0.30	0.10

【例題13-7】代替案の評価

- 仮に、年収、仕事内容、将来性の重要度がそれぞれ0.3、0.5、0.2で、各代替案の相対評価点が以下の表で与えられているとすれば、最終的にB社を選択するという結論になる

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			年収	仕事内容	将来性	総合評価点				
3		配分	0.3	0.5	0.2					
4		A社	0.4	0.1	0.45	0.26	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C4:E4)			
5		B社	0.35	0.4	0.2	0.345	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C5:E5)			
6		C社	0.2	0.2	0.25	0.21	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C6:E6)			
7		D社	0.05	0.3	0.1	0.185	=SUMPRODUCT(\$C\$3:\$E\$3,C7:E7)			

	年収	仕事内容	将来性	総合評価点
配分	0.3	0.5	0.2	
A社	0.40	0.10	0.45	0.26
B社	0.35	0.40	0.20	0.345
C社	0.20	0.20	0.25	0.21
D社	0.05	0.30	0.10	0.185

一対比較

- AHPでは、「重要度」と「相対評価点」を決定する手段として、通常、一対比較に基づく算出方法が用いられる
- 一対比較は、各評価項目（もしくは代替案）について、それが他のものと比べてどの程度重要か（優れているか）、1対1で比較する方法であり、 i の j に対する評価 α_{ij} を以下の表に基づいて数値化することにする
- ただし、 i が j に劣っている場合は、その程度によって $\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}$ といった値をとることとし、 $\alpha_{ij} = \frac{1}{\alpha_{ji}}$ が成り立つようにする
- 一対比較の結果を行列の形で表したものを**一対比較行列**と呼ぶ

一対比較値	定義
1	同じくらい重要・優れている
3	すこし重要・優れている
5	かなり重要・優れている
7	非常に重要・優れている
9	絶対的に重要・優れている

2, 4, 6, 8はこれらの中間として補完的に用いる

【例題13-8】一対比較

- 評価項目に対して一対比較を行った結果、「仕事内容」が「年収」に比べ「かなり重要」で、「将来性」に対しては「絶対的に重要」、また、「年収」と「将来性」では「年収」のほうが「かなり重要」であるとすれば、結果と一対比較行列は以下のようになる
- 一対比較行列から評価項目の重要度、代替案の相対評価点を算出する方法として、「固有値法」や「幾何平均法」などがよく知られている
 - 固有値法：一対比較行列 A の固有値の中で絶対値が最大のもの（主固有値）に対する固有ベクトル（主固有ベクトル）を用いる
 - 幾何平均法：一対比較行列 A のそれぞれの行の要素の幾何平均を用いる（ n 個の値 $a_1, a_2, \dots, a_n$ に対して、 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ を幾何平均と呼ぶ。ExcelではGEOMEAN関数で計算することができる。）
- いずれの方法においても、重要度（相対評価点）の総和が1となるように各種を合計の値で割っておく
- 一対比較行列 A の重要度を求め、どの結果がよいか選択せよ

	年収	仕事内容	将来性
年収	1	1/5	5
仕事内容	5	1	9
将来性	1/5	1/9	1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 5 \\ 5 & 1 & 9 \\ 1/5 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

【例題13-8】一対比較

- 一対比較行列Aの主固有値は3.1171※で、主固有ベクトルは(0.207, 0.735, 0.058)である
- 一方、Aの各行の幾何平均は、1.000, 3.557, 0.281である
- これらの合計値で各値を割ると、それぞれ、0.207, 0.735, 0.058となる
- この例題の場合、固有値法、幾何平均法のいずれを用いても評価項目の重要度は同じで、「年収」に20.7%、「仕事内容」に73.5%、「将来性」に5.8%の重きをおいて就職先の決定を行うことになる

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		年収	仕事内容	将来性			幾何平均	固有ベクトル		
2	年収	1	0.2	5			1	0.206695379	=GEOMEAN(B2:D2)	=G2/\$G\$5
3	仕事内容	5	1	9			3.556893304	0.73519341	=GEOMEAN(B3:D3)	=G3/\$G\$5
4	将来性	0.2	0.111111	1			0.281144222	0.058111211	=GEOMEAN(B4:D4)	'=GEOMEAN(B4:D4)
5							4.838037526		=SUM(G2:G4)	

※固有値は以下サイトを利用して求める（線形代数を用いて解くこともできる）

<https://matrixcalc.org/ja/vectors.html#eigenvectors%28%7B%7B1,0%2e2,5%7D,%7B5,1,9%7D,%7B0%2e2,1%7D%7D%29>

【例題13-8】一対比較

- 以下の表は、各評価項目について、どの代替案がどの程度優れているかを一対比較によって調べた結果をまとめたものである
- この結果にしたいが、幾何平均法を用いて各代表案の相対評価点を計算する

	A社	B社	C社	D社
A社	1	3	5	9
B社	1/3	1	5	7
C社	1/5	1/5	1	3
D社	1/9	1/7	1/3	1

	A社	B社	C社	D社
A社	1	1/5	1/3	1/3
B社	5	1	2	3
C社	3	1/2	1	2
D社	3	1/3	1/2	1

	A社	B社	C社	D社
A社	1	3	9	5
B社	1/3	1	5	3
C社	1/9	1/5	1	1/5
D社	1/5	1/3	5	1

【例題13-8】一対比較

- 以下の表は、各評価項目について、どの代替案がどの程度優れているかを一対比較によって調べた結果をまとめたものである
- この結果にしたいが、幾何平均法を用いて各代表案の相対評価点を計算する

7	年収	A社	B社	C社	D社		機械平均	固有ベクトル		
8	A社	1	3	5	9		3.408658099	0.557418916	=GEOMEAN(B8:E8)	=G8/\$G\$12
9	B社	0.333333	1	5	7		1.84814779	0.302228181	=GEOMEAN(B9:E9)	=G9/\$G\$12
10	C社	0.2	0.2	1	3		0.588566191	0.096248412	=GEOMEAN(B10:E10)	=G10/\$G\$12
11	D社	0.111111	0.142857	0.333333	1		0.269702237	0.044104491	=GEOMEAN(B11:E11)	=G11/\$G\$12
12							6.115074318		=SUM(G8:G11)	
13	仕事内容	A社	B社	C社	D社		機械平均	固有ベクトル		
14	A社	1	0.2	0.333333	0.333333		0.386097395	0.079062988	=GEOMEAN(B14:E14)	=G14/\$G\$18
15	B社	5	1	2	3		2.340347319	0.479243982	=GEOMEAN(B15:E15)	=G15/\$G\$18
16	C社	3	0.5	1	2		1.316074013	0.269498696	=GEOMEAN(B16:E16)	=G16/\$G\$18
17	D社	3	0.333333	0.5	1		0.840896415	0.172194333	=GEOMEAN(B17:E17)	=G17/\$G\$18
18							4.883415143		=SUM(G14:G17)	
19	将来性	A社	B社	C社	D社		機械平均	固有ベクトル		
20	A社	1	3	9	5		3.408658099	0.575588355	=GEOMEAN(B20:E20)	=G20/\$G\$24
21	B社	0.333333	1	5	3		1.495348781	0.252505625	=GEOMEAN(B21:E21)	=G21/\$G\$24
22	C社	0.111111	0.2	1	0.2		0.25819889	0.043599642	=GEOMEAN(B22:E22)	=G22/\$G\$24
23	D社	0.2	0.333333	5	1		0.759835686	0.128306377	=GEOMEAN(B23:E23)	=G23/\$G\$24
24							5.922041456		=SUM(G20:G23)	

【例題13-8】一対比較

- 総合評価点を計算すると以下の表が得られる
- この結果からは、B社が選択されることになる

	年収	仕事内容	将来性	総合評価点
	0.207	0.735	0.058	
A社	0.557	0.079	0.576	0.207
B社	0.302	0.479	0.253	0.429
C社	0.096	0.269	0.044	0.221
D社	0.044	0.172	0.128	0.143

25		年収	仕事内容	将来性	総合評価点			
26	重要度	0.206695	0.735193	0.058111				
27	A社	0.557419	0.079063	0.575588	0.206791	=SUMPRODUCT(B27:D27,\$B\$26:\$D\$26)		
28	B社	0.302228	0.479244	0.252506	0.42948	=SUMPRODUCT(B28:D28,\$B\$26:\$D\$26)		
29	C社	0.096248	0.269499	0.0436	0.220561	=SUMPRODUCT(B29:D29,\$B\$26:\$D\$26)		
30	D社	0.044104	0.172194	0.128306	0.143168	=SUMPRODUCT(B30:D30,\$B\$26:\$D\$26)		

整合性

- 例題13-6から例題13-8について、3つの評価項目の重要度を w_1, w_2, w_3 としたとき、一対比較行列 A が

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & w_1/w_3 \\ w_2/w_1 & 1 & w_2/w_3 \\ w_3/w_1 & w_3/w_2 & 1 \end{pmatrix}$$

となっていることが理想的であり、この場合、**整合性**があるという（各相対評価点についても同様である）

- しかし、人間が与えた一対比較行列は、通常、このような理想的な（整合的な）形にはならない
- そこで、一対比較行列がどの程度整合的であるかを示す指標として、整合度（整合性指数）と呼ばれるものが用いられる
- 重要度や相対評価点の計算に幾何平均法を用いた場合、整合度は以下の手順で計算することができる。ここで、評価項目数あるいは代替案数を n とする。
 - 重要度（相対評価点） $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ から、それらの比 $\beta_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ を (i, j) 成分とする $n \times n$ 行列 B を計算する（一対比較行列 A に整合性がある場合、 A は B に一致する）
 - 一対比較行列 A と行列 B について、対応する各成分の比の総和を n で割った値 $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}$ を計算する
 - 以下の式により整合度 CI を計算する

$$CI = \frac{\mu - n}{n - 1}$$
 - 一対比較行列 A に整合性があれば、 $CI = 0$ が成立する
 - 一般に、 $CI \leq 0.1$ （もしくは $CI \leq 0.15$ ）であれば、整合性のずれは許容範囲であると考えられている

目次

- 第1回 ガイダンス, オペレーションズリサーチとは
- 第2回 最適化問題
- 第3回 連続最適化
- 第4回 組合せ最適化
- 第5回 ネットワーク最適化1
- 第6回 ネットワーク最適化2
- 第7回 シミュレーション1
- 第8回 シミュレーション2
- 第9回 待ち行列理論1
- 第10回 待ち行列理論2
- 第11回 不確実性下での意思決定 (意思決定原理)
- 第12回 不確実性下での意思決定 (ディシジョンツリー・効用)
- 第13回 ゲーム理論
- 第14回 物流2024年問題

物流2024年問題とは

物流2024年問題

2024年4月以降、自動車運転業務の時間外労働時間の上限が
960時間と定められることにより、物流業界での輸送能力が不足することが懸念される

物流204年問題を契機にデータ活用（デジタル化やAI活用）がさらに重要となる と考えられる

数理最適化が物流2024年問題にどのように貢献できるか

- 最適な敗走ルート
- 最適な車両計画
- 最適な人員配置
- 最適な積付け

物流業界の現状

物流業界全体で業務の改革を進めている

■ デジタイゼーション (Degitization)

紙の帳票を無くす等, 自社内の業務を電子化して省力化



■ デジタライゼーション (Digitalization)

企業間の取引に注文管理システムを導入する等して業務全体の効率化



■ デジタル・トランスフォーメーション (DX)

機械学習や数理最適化等のデジタル技術導入により事業やビジネスモデルを変革

例) 復路も空荷にしないように貨物を収集して自社の近くの配送先に貨物をおろさせるようなルート決定 (トラックと荷物のマッチング)

サプライチェーンマネジメントと数理最適化

■ サプライチェーンマネジメント (SCM)

- ・調達から製造, 輸送, 販売までのモノの流れを管理

■ なぜSCMが重要か

- ・不確実性のある社会において, 先々の販売から製造や調達のリスクを判断
- ・有限資源を効率的に活用し, ムダを省きコスト削減

SCM に現れる数理最適化問題

調達



- ・調達計画
- ・ ...

製造



- ・生産スケジューリング
- ・カッティングストック
- ・ ...

倉庫



- ・商品配置
- ・ピッキング最適化
- ・ ...

物流



- ・配車配船
- ・積み付け計画
- ・ ...

販売



- ・シフトスケジューリング
- ・人員配置
- ・ ...

物流DXと数理最適化

物流フロー



物流 DX における課題例

- 人手不足・高齢化
- 低い積載率
- 貨物の小口多頻度化
- 燃料価格の高騰
- CO2 排出量
- 宅配貨物の再配達

数理最適化問題

- シフトの最適化
- 積み付けの最適化
- 配送ルート of 最適化
- 配車の最適化
- 施設配置の最適化
- 倉庫内物流の最適化

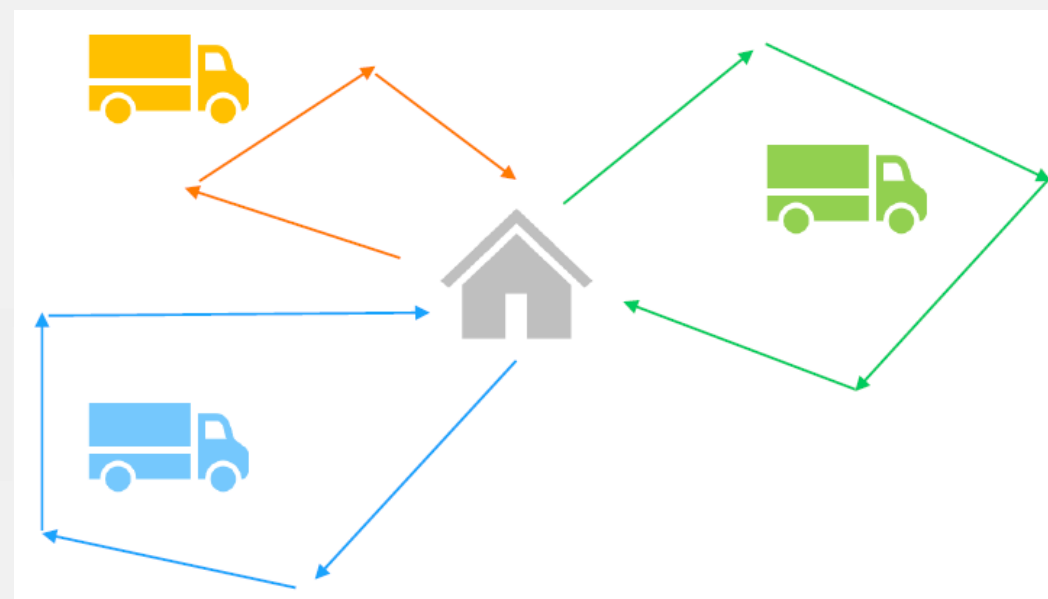
シフトの最適化

- 目的
 - 限られた従業員数で顧客のニーズを満足する人員配置
 - 従業員満足度を上げて離職を減らす
- 考慮する条件の例
 - 労働基準法等の関連法規
 - 需要を満たす人員配置
 - 各従業員の希望
 - 従業員のスキル（免許）
 - 従業員の負荷平準化

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	従業員\日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	A	-	-	午前1	午前2	日勤1	午前5	午後4	-	-	午
3	B	-	日勤4	日勤2	日勤4	日勤2	日勤4	-	-	午後3	午
4	C	-	-	日勤3	午前5	夜勤3	夜勤2	夜勤1	-	-	
5	D	日勤4	日勤4	午後4	-	-	日勤3	日勤3	-	-	午
6	E	午後3	夜勤1	夜勤3	-	-	午前3	午前3	午前4	-	
7	F	日勤1	午後4	午後4	夜勤3	-	-	午後2	午後3	-	
8	G	-	-	日勤4	日勤5	午後2	-	-	夜勤2	夜勤1	
9	H	-	-	午後3	午後5	午後1	午後1	午後4	-	-	午
10	I	-	-	日勤1	日勤1	午後3	-	-	午前4	午前5	
11	J	午後4	-	-	日勤2	日勤5	夜勤3	夜勤2	-	-	日
12	K	日勤3	-	-	午前5	夜勤2	-	-	日勤1	午前5	夜
13	L	午前2	午前3	午前4	日勤4	日勤4	-	-	-	午前4	午

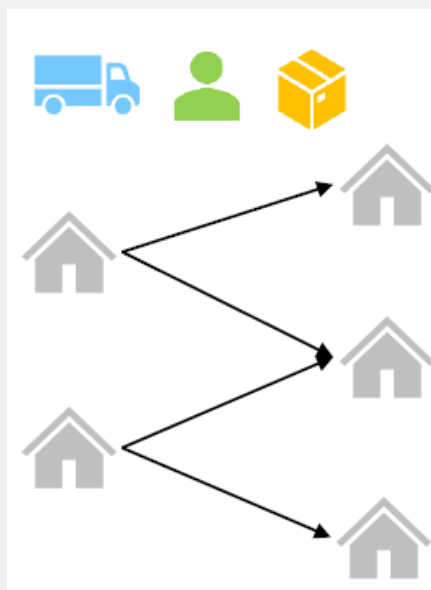
配送ルート最適化

- 目的
 - 配送ルートを最適化することでコスト削減，積載率増加，台数削減，再配達現象
- 考慮する条件の例
 - 労働基準法等の関連法規
 - 配送先の配送希望時間
 - 配送先の需要量
 - 車両の積載量上限
 - 通行規制



配車の最適化

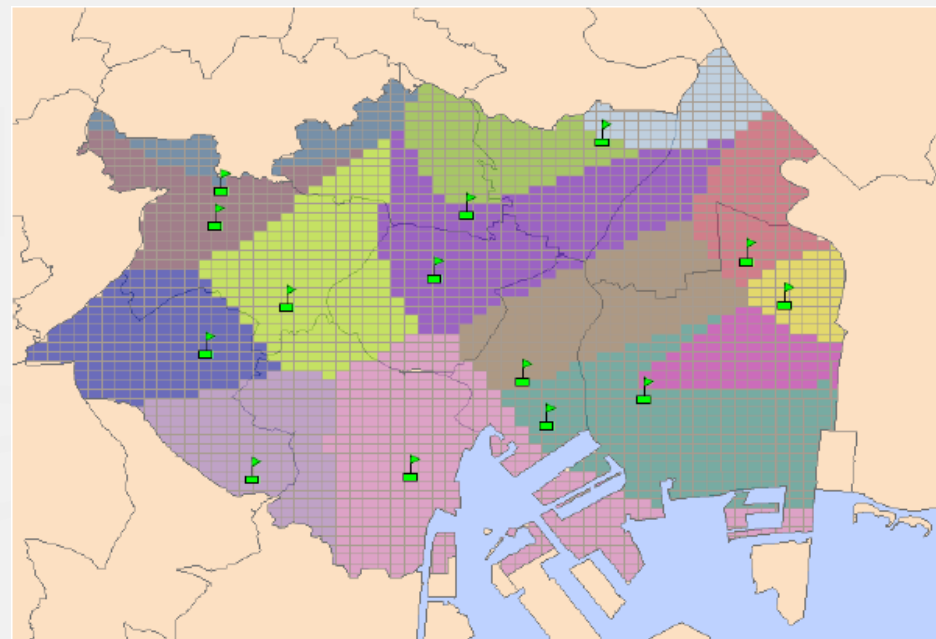
- 目的
 - 最適な荷物と車両の割当を得ることで積載率向上，台数削減
- 考慮する条件の例
 - 輸送コスト
 - 車両や荷物の種類
 - 混載する荷物の種類
 - ドライバーの資格



車両	運転手	1 日	2 日	3 日
XX-01	A.Y	0.1 0.2	休	0.10
XX-02	A.S	0.3 0.4	0.6 0.7	0.11
YY-01	A.T	0.5	0.8 0.9	休

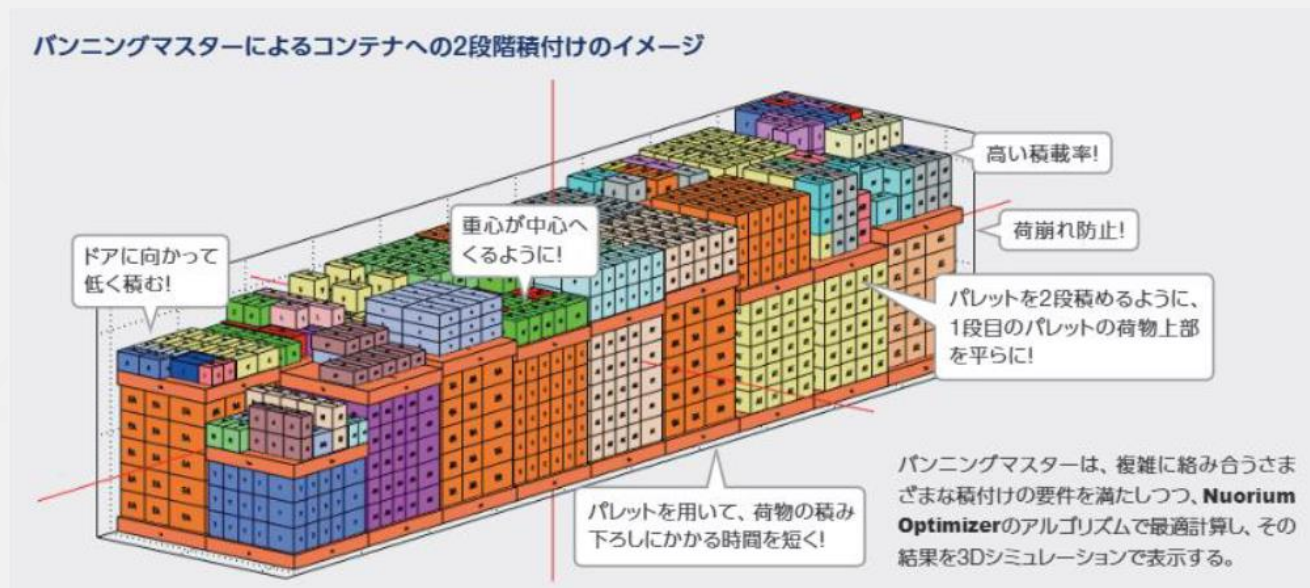
物流拠点の配置最適化

- 目的
 - 物流拠点の親切や統廃合により輸送コスト削減，台数削減
- 考慮する条件の例
 - 配送先の需要や分布
 - 物流拠点のキャパシティ
 - 輸送距離とコスト



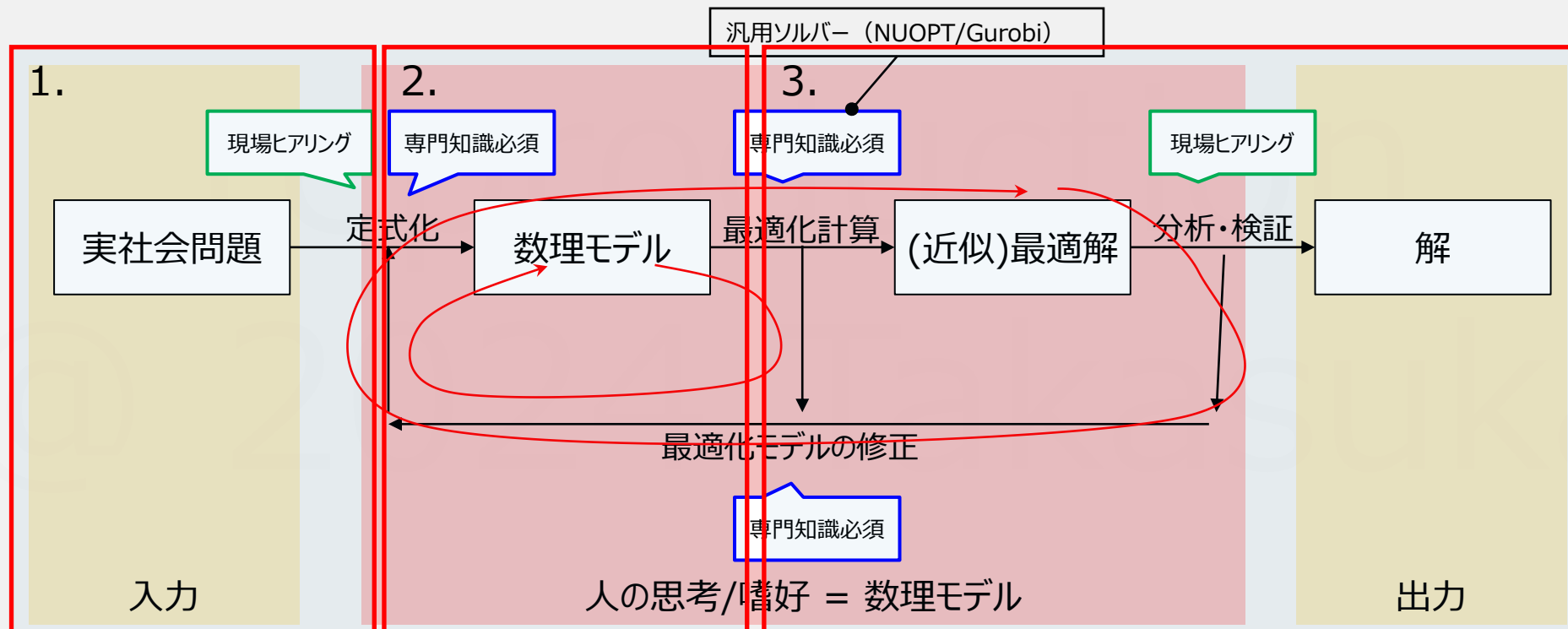
積付けの最適化

- 目的
 - コンテナへの貨物の積付けやヤードへの積付けを最適化し、積載率向上や積み上げ作業の効率化
- 考慮する条件の例
 - 貨物の形状
 - 荷物を下ろす順序
 - 積載率
 - 荷崩れ防止



数理最適化を用いる流れ

1. 解くべき数理最適化問題を定義
 - すなわち, 目的関数, 制約条件, 変数を定義
2. 数理最適化問題を数式で表現 (定式化)
3. ソルバを用いる, またはアルゴリズムを実装し, 計算機に計算させて解を得る



実社会での適用例

© 2023 NTT West Corporation. All Rights Reserved

13

背景

- 与えられた全ての工事に対して立会者の割当を決定する問題である
- 移動距離や立会者のスキル等の様々な条件を考慮し割当を決定している
- 条件は万人共通の条件もあれば手配者の思考や嗜好によって異なるものもある

入力



出力



実社会での適用例

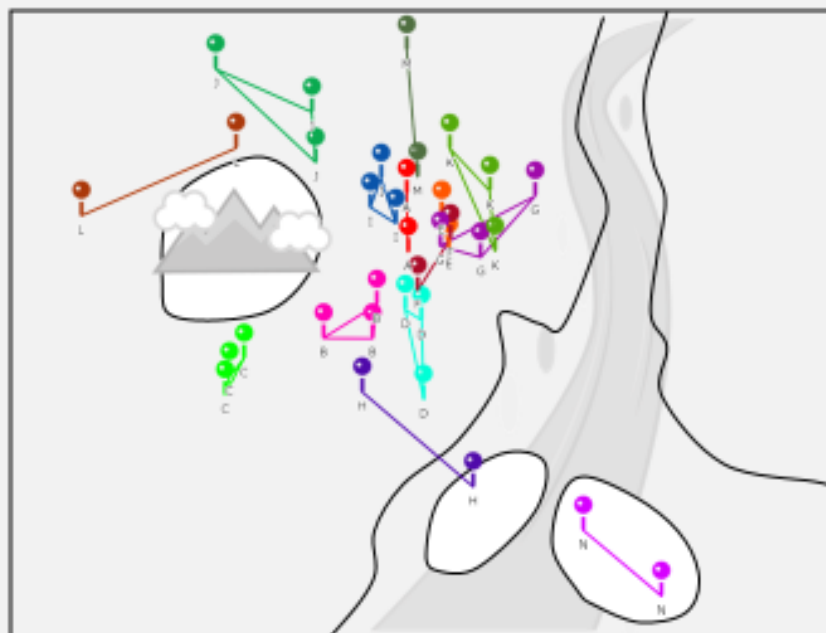
© 2023 NTT West Corporation. All Rights Reserved

15

[軽く紹介](#)

①現場の手配者による工事立会者の手配

- 目的関数や制約条件は曖昧であり手配者によって手配結果が異なる
- 良い手配結果と悪い手配結果はベテランの手配者には判定可能である
- スキルの高い手配者の思考を再現可能な数理モデルを構築する



Staff	T1	T2	T3	合計移動時間	合計割当ペナルティ	合計難易度
A	15	16	-	900	7	5
B	1	2	3	638	13	8
C	4	5	6	518	16	8
D	7	8	9	886	12	8
E	10	11	12	564	17	8
F	13	14	-	586	12	4
G	17	18	19	825	18	8
H	20	21	-	1098	9	5
I	22	23	24	604	12	8
J	25	26	27	1115	13	7
K	28	29	30	916	13	7
L	31	32	-	1276	9	5
M	33	34	-	796	8	5
N	35	36	-	702	4	5
総				11424	163	91

過去の現場の手配者が実際に割り当てた結果

実社会での適用例

2-4. 工事立会者手配問題に対する数理モデル

■ 入力

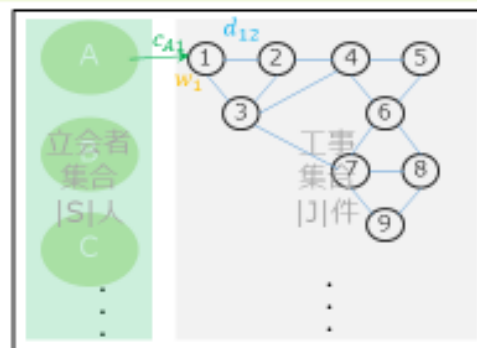
- ・ 立会者の集合 S および工事の集合 J
- ・ 工事 k から l への移動時間 d_{kl}
- ・ 立会者 s に工事 k を割り当てたときの割当ペナルティ c_{sk}
- ・ 工事の難易度 w_k
- ・ 各立会者に割り当てられた工事の難易度の和に対する上限 W

■ 制約条件

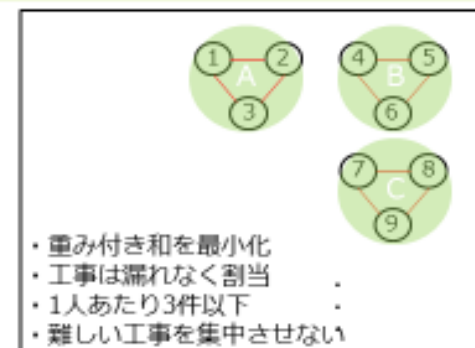
- ・ 各工事にちょうど1人の立会者を割り当てること
- ・ 各立会者に割り当てられる工事数は3件以下とすること
- ・ 各立会者に割り当てられる工事の総難易度は W 以下とすること

- すべての立会者の総移動時間と総割当てペナルティ（工事に対する立会者のスキルを示す指標）の重み付き和を最小化することが目的である

■ 入力



■ 出力



実社会での適用例

4 - 1. 集合被覆アプローチによる定式化 (Enum)

- 集合被覆アプローチによる定式化は以下である
- 以下を満たす実行可能なルートを列挙し全ての工事を被覆するルートを選ぶ
 - A) $|J|$ 件の工事に対し, $|S|$ 人の立会者を割り当てる
 - B) 各工事にちょうど1人の立会者を割り当てる
 - C) 各立会者に割り当てられる工事数は3件以下とする
 - D) 各立会者に割り当てられる工事の総難易度は W 点以下とする
 - E) すべての立会者の総移動時間と総割当ペナルティの重み付き和を最小化する

□ 集合被覆アプローチによる定式化

$$\begin{aligned}
 &\min \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} (\tilde{d}_r + \alpha \tilde{c}_{rs}) y_{rs} \\
 &\text{s.t. } \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} a_{kr} y_{rs} \geq 1 \quad (\forall k \in J) \\
 &\quad \sum_{r \in R} y_{rs} \leq 1 \quad (\forall s \in S) \\
 &\quad y_{rs} \in \{0, 1\} \quad (\forall r \in R, \forall s \in S)
 \end{aligned}$$

S : 立会者の集合

J : 工事の集合

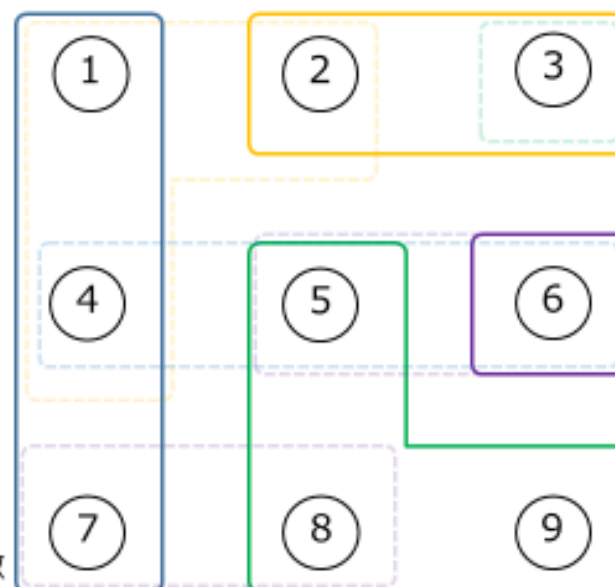
R : 実行可能なルートの集合

$\tilde{d}_r$: ルート r の合計移動時間

$\tilde{c}_{rs}$: 立会者 s がルート r を担当したときの合計割当ペナルティ

a_{kr} : ルート r が工事 k を含むとき $a_{kr} = 1$, 含まないとき $a_{kr} = 0$

α : 総移動時間と総割当ペナルティの重み係数



実社会での適用例

3 - 3. 実データへの適用結果

- 24 個の手配結果を相違度の尺度を用いて比較する
- 行列内の数値は【観点1】の $\hat{H}_A$ と【観点2】の H_B の重み付き和

$$\hat{H}_C = (1 - \beta)\hat{H}_A + \beta\hat{H}_B$$
- 現場の手配者と最も相違度が低いのは数理モデル4 ($\alpha = 50$)である
- 手配者の主観評価とも合致する結果となる

順番	モデル	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	現場の手配者	0	66.7	66.7	73.5	72.3	66.4	76.8	74.8	79.2	81.1	83.6	82	69.9	65.9	74.3	65	66.7	66.2	73.5	78.4	82.7	77	83.6	83.6
2	数理モデル1	66.7	0	64.7	68.3	67.2	67.6	75.6	82.4	79.2	82.4	81.2	82.8	66.4	66.9	74	70.4	72	67.2	76.7	83.5	85.2	75.8	81.2	82.4
3	数理モデル2	66.7	64.7	0	48	47.4	49.1	73.3	70.2	76.9	75.3	81.3	80.1	55.3	47.4	63.6	64.5	61.7	58.9	66.8	74.8	75.3	75.1	81.3	81.3
4	数理モデル3($\alpha=20$)	73.5	68.3	48	0	53.4	53.1	72.6	68.6	75.7	74.1	84.1	81.3	53.8	52	62.1	57	60.5	59.4	61.2	78.8	75.3	73.1	82.5	82.9
5	数理モデル3($\alpha=40$)	72.3	67.2	47.4	53.4	0	37.4	70.6	60.3	69.4	60.3	75.4	74.2	59.6	62.5	50.2	58.5	51.8	42.3	53.3	67.8	65.7	66	77	75.8
6	数理モデル3($\alpha=60$)	66.4	67.6	49.1	53.1	37.4	0	59.9	43.3	56.7	53.9	65.5	59.9	61.7	61.4	55.4	57.7	48	37.6	57	53.9	58.3	57.3	65.5	65.5
7	数理モデル3($\alpha=100$)	76.8	75.6	73.3	72.6	70.6	59.9	0	45.7	45.2	67.9	64	57.2	74	79.3	73.8	73.8	60.3	67	78.9	60.3	69.8	49.1	62.4	64
8	数理モデル3($\alpha=190$)	74.8	82.4	70.2	68.6	60.3	43.3	45.7	0	38.6	52	58	54.1	74.4	76.9	65.3	71.3	63.9	56.7	64.6	41.7	47.7	42	59.2	63.6
9	数理モデル3($\alpha=330$)	79.2	79.2	76.9	75.7	69.4	56.7	45.2	38.6	0	43	25.9	27.5	80	81.3	70.6	70.6	63.9	60.4	66.7	59.2	51.2	19.7	33	33
10	数理モデル3($\alpha=610$)	81.1	82.4	75.3	74.1	60.3	53.9	67.9	52	43	0	45.8	45.8	77.6	77.3	65.1	67.1	62.4	56	57.2	54.1	56.4	41.5	51.3	44.2
11	数理モデル3($\alpha=770$)	83.6	81.2	81.3	84.1	75.4	65.5	64	58	25.9	45.8	0	15.9	86	84.5	73.6	75	68.3	70.3	75.4	69.2	61.6	30.9	13.2	13.2
12	数理モデル3($\alpha=1390$)	82	82.8	80.1	81.3	74.2	59.9	57.2	54.1	27.5	45.8	15.9	0	83.2	83.3	77	75	61.6	64.8	75.4	62.4	57.6	32.5	17.5	17.5
13	数理モデル4($\alpha=0$)	69.9	66.4	55.3	53.8	59.6	61.7	74	74.4	80	77.6	86	83.2	0	48.7	61.4	58.5	57.3	59.4	58	74.1	73.7	77.8	86	84.8
14	数理モデル4($\alpha=10$)	69.9	66.9	47.4	52	62.5	61.4	79.3	76.9	81.3	77.3	84.5	83.3	48.7	0	58.5	60.5	59.8	57.5	66.8	75.3	79.2	77.9	84.5	83.3
15	数理モデル4($\alpha=30$)	74.3	74	63.6	62.1	50.2	55.4	73.8	65.3	70.6	65.1	73.8	77	61.4	58.6	0	53.9	51.9	42	66.1	57.7	64.9	71.6	76.6	75.4
16	数理モデル4($\alpha=50$)	65	70.4	64.5	57	58.5	57.7	73.8	71.3	70.6	67.1	75	75	58.5	60.5	53.9	0	45.2	51.5	56.7	68.3	69	68.4	77.8	77.8
17	数理モデル4($\alpha=60$)	66.7	72	61.7	60.5	51.8	48	60.3	63.9	63.9	62.4	68.3	61.6	57.3	59.8	51.8	45.2	0	36.8	60.7	64.3	63.4	62.1	68.3	68.3
18	数理モデル4($\alpha=90$)	66.2	67.2	58.9	59.4	42.3	37.6	67	56.7	60.4	56	70.3	64.8	59.4	57.5	42	51.5	36.8	0	63.7	43.6	63.4	63.7	70.3	69.2
19	数理モデル4($\alpha=110$)	73.5	76.7	66.8	61.2	53.3	57	78.9	64.6	66.7	57.2	75.4	75.4	58	66.8	66.1	56.7	60.7	63.7	0	59.2	47.4	64	79.4	78.2
20	数理モデル4($\alpha=200$)	78.4	83.5	74.8	78.8	67.8	53.9	60.3	41.7	59.2	54.1	69.2	62.4	74.1	75.3	57.7	68.3	64.3	43.6	59.2	0	34.7	63.7	70.3	69.2
21	数理モデル4($\alpha=260$)	82.7	85.2	75.3	75.3	65.7	58.3	69.8	47.7	51.2	56.4	61.6	57.6	73.7	79.2	64.9	69	63.4	63.4	47.4	34.7	0	58.9	67.1	67.1
22	数理モデル4($\alpha=360$)	77	75.8	75.1	73.1	66	57.3	49.1	42	19.7	41.5	30.9	32.5	77.8	77.9	71.6	68.4	62.1	63.7	64	63.7	58.9	0	29.2	36.4
23	数理モデル4($\alpha=640$)	83.6	81.2	81.3	82.5	77	65.5	62.4	59.2	33	51.3	13.2	17.5	86	84.5	76.6	77.8	68.3	70.3	79.4	70.3	67.1	29.2	0	7.16
24	数理モデル4($\alpha=970$)	83.6	82.4	81.3	82.9	75.8	65.5	64	63.6	33	44.2	13.2	17.5	84.8	83.3	75.4	77.8	68.3	69.2	78.2	69.2	67.1	36.4	7.16	0

Differ

Similar

実社会での適用例

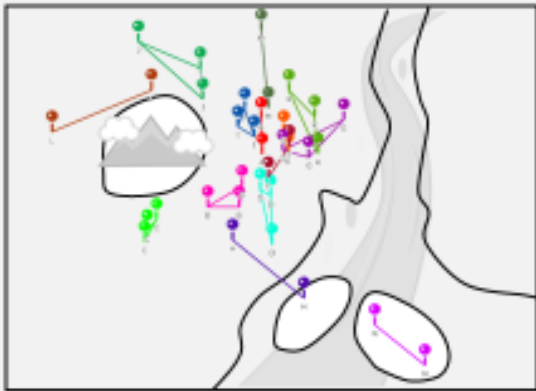
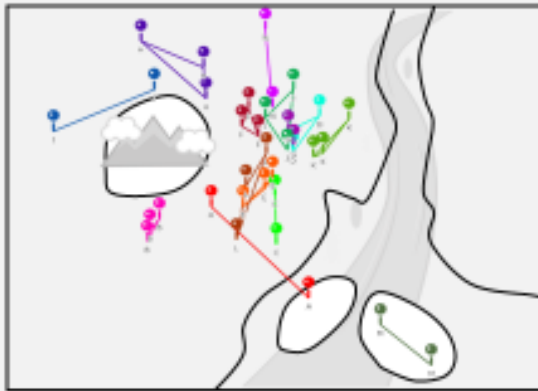
© 2023 NTT West Corporation. All Rights Reserved

17

軽く紹介

①数理モデル構築の結果まとめ

- 高度な技能を有している手配者により意思決定が行われている工事立会者手配業務に対し実用的な手配結果を算出可能な数理モデルを構築した

過去の工事立会者手配業務			デジタルデータ活用による工事立会者手配業務		
長期効果	人件費	年間1億（関東エリア：年間6万件）	年間0.1億（関東エリア：年間6万件）（想定）		
	品質	年間工事事故5件	年間工事事故0件（想定）		
短期効果	総移動時間	11,424 s（3.2 h）	11,593 s（3.2 h）※1		
	総割当ペナルティ	163 pt	81 pt※1		
付随効果	手配時間	3時間2回/1日	5分×2回/1日		
	やり方	アナログ（手書き）	デジタル		
	手配結果				

※1：数理モデル4で総移動時間を重視すると、総移動時間10,697 s、総品質146 ptとなる。