最適化　試験問題

2005. 2. 2

（**注意：** 問題および解答用紙はそれぞれ全部で２ページである．
問１と問２の解答には別々の解答用紙を用い，各々の
解答用紙に名前を書くこと．）

問 1． 次の非線形計画問題を考える．

$$
\begin{array}{lll}
P: & \text{目的関数：} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \ \rightarrow \ \text{最小} \\
 & \text{制約条件：} & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{c}
\end{array}
$$

ただし，$\boldsymbol{c}$ は n 次元定数ベクトル，$\boldsymbol{A}$ は $n \times n$ 定数行列，$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである．ベクトルはすべて列ベクトルであり，$^\top$ は転置を表す．さらに，行列 $\boldsymbol{A}$ は正定値対称であり，$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ であると仮定する．

以下の問 (a) – (d) に答えよ．

(a) 問題 P に対する KKT 条件（Karush-Kuhn-Tucker 条件，Kuhn-Tucker 条件ともいう）を書け．

(b) 問題 P が凸計画問題であることを考慮して，問 (a) の KKT 条件から問題 P の最適解を求めよ．

(c) 問題 P に対する（Lagrange の）双対問題 D を導け．

(d) 双対問題 D の最適解を求めよ．さらに，問題 D の目的関数の最大値が問題 P の目的関数の最小値と等しいことを確かめよ．

(問２は次ページ)

問 2.

(ア) 以下の節点カバー問題と総滞留時間最小化問題を 0–1 計画問題として定式化せよ.

節点カバー問題

入力: 節点集合 V, 枝集合 E を持つ無向グラフ $G=(V,E)$.

出力: 全ての枝 $(u,v)\in E$ に対して $u\in S$ または $v\in S$ を満たすように節点の部分集合 $S\subseteq V$ を選ぶときの $|S|$ の最小値.

総滞留時間最小化問題

入力: n 個の仕事の処理時間 $p_1,p_2,\ldots,p_n$.

出力: 順列 π ($\pi(i)=k$ は仕事 i を k 番目に処理することを表す) に対する仕事 i の完了時刻を $C_i(\pi)=\sum_{j:\,\pi(j)\le\pi(i)} p_j$ とする. すべての可能な順列 π を考えたときの総滞留時間 $\sum_{i=1}^{n} C_i(\pi)$ の最小値.

(イ) 要素集合 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ のそれぞれに自然数のサイズ a_i が与えられたとき, 要素集合を $S\subseteq N$ とその補集合 $\bar{S}=N\setminus S$ の 2 つに分けて $\sum_{i\in S} a_i=\sum_{i\in\bar{S}} a_i$ が成立するか否かを問う決定問題を考える. 条件が成り立つ分割 $(S,\bar{S})$ が存在すれば答えは yes, そうでなければ no である.

(a) この問題に対する動的計画法の漸化式を書き下せ.

(b) 問題例 $a_1=3, a_2=2, a_3=1$ に対する答えは yes である. この問題例に対する動的計画法の計算過程を表で示し, 条件を満たす分割 $(S,\bar{S})$ がどのようにして表から得られるかを述べよ.

以上